コロナ・ショックによる株価下落の回復はいつか？

S&P500 の確率微分方程式による解析と予測

2020 年 4 月

はじめに

確率微分方程式の解を株価に見立てることによってその将来の動きを確率的に予測することができることを示す。ここでは米国の代表的な株価指数である S&P500 をとりあげた。同方程式に含まれるパラメーターの値を探索することからはじめ、誰でも表計算ソフト（エクセル）でその動きを体感できるようにした。2020 年 3 月にコロナ・ウィルスの世界的蔓延とともに発生した株価の暴落は投資家にとって最大の関心事と思われるが、1987 年のブラック・マンデーや 2008 年のリーマン・ショック後の同指数の動きを参考にしながら、具体的な計算を行い「いつ暴落前のレベルに戻るのか？」を具体的に示す。

１） 確率微分方程式のパラメーターの探索

確率微分方程式①とその解析解②には成長係数の r とゆらぎ係数の v のふたつのパラメーターが含まれる。B(t) は S&P500 のランダムな動き（ブラウン運動）を示すもとする。

$$\frac{dx}{dt} = rx + vx\frac{dB(t)}{dt} \quad ・・・①$$

$$x_t = x_0 e^{\left(r - \frac{v^2}{2}\right)t + vB(t)} \quad ・・・②$$

②式をみると、解析解 x_t は $x_0 e^{\left(r - \frac{v^2}{2}\right)t}$ を中央値（以後 μ と呼ぶ）としてゆらぐことが分かる。S&P500 がこの解析解のひとつであると仮定し、ゆらぎ項 vB(t) を無視して、初期値 x_0=16.66 (1950 年 1 月 3 日の終値) が単純に x_{16348}=2058.90 (初稿執筆時の 2014 年 12 月 31 日＝16,348 回目の取引の終値) に指数増加したと考える。ここで、

$$\left(r - \frac{v^2}{2}\right) = r'$$

とおいて、②式を

$$x_t = x_0 e^{r't}$$

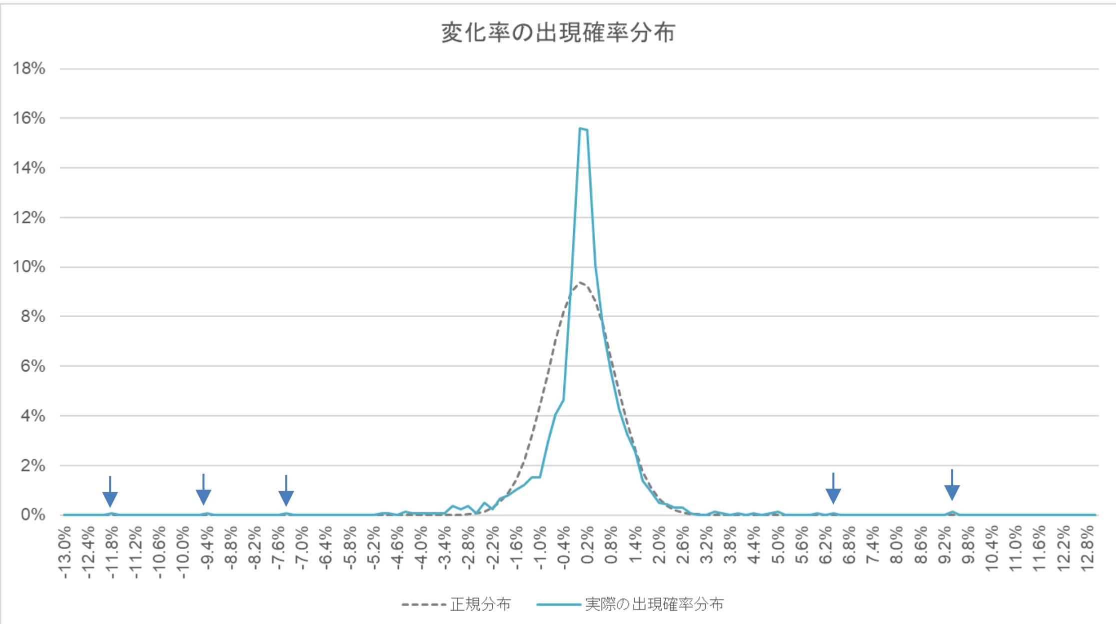
とし、ここに初期値 x_0 と x_{16348} の値を代入すると、

$$x_{16348} = 16.66e^{r'*16348} = 2058.90 \cdot\cdot\cdot ③$$

③式より $r' = 2.946 \text{ x } 10^{-4}$、つまり、$r - \frac{v^2}{2} = 2.946 \text{ x } 10^{-4}$

ここで、確率微分方程式の前提条件である「確率変数は平均をゼロ、標準偏差を $v\sqrt{t}$ とする正規分布に従う」は果たして妥当かという点について検証する。図 0 に 2014 年 10 月 10 日から 2020 年 4 月 3 日までの 1380 日間に実際に出現した変化率の確率分布を青い実線で表示した。破線が同期間の変化率の平均と標準偏差をもとに計算した正規分布である。実際の確率分布は正規分布よりも少しスリムである一方、裾野のところどろに大きな変化があったことを示す突起がある。正規分布の裾野にはこのようなイレギュラーな山はないものの S&P500 の日々の変化はおおよそ表現できていると捉えることにする。

図 0



青色の線が 2014 年 10 月 10 日から 2020 年 4 月 3 日まで（1,380 日間）の変化率の出現確率。確率微分方程式が前提する正規分布よりもスリムですそ野が長い（ところどころに暴落時に出現する大きな変化率が現れる）。

次に、r と v の組み合わせをランダムに設定して、実際の S&P500 の動きと照らし合わせて

みよう。グラフの横軸は時間 t（日数)、縦軸を確率微分方程式の解析解 x_t（ある経過日数後の株価指数）とする。縦軸が対数であることより、中央値 $\mu = x_0 e^{\left(r - \frac{v^2}{2}\right)t}$（オレジの線）はS&P500（水色の線）の初値 x_0 と終値 x_{16348} を結ぶ直線となる。一方、μからのゆらぎσは以下のように中央値に標準偏差 $x_0 e^{v\sqrt{t}}$ の倍数を掛け合わせることで表現できる。

$$x_0 e^{\left(r-\frac{v^2}{2}\right)t+v\sqrt{t}} \quad x_0 e^{\left(r-\frac{v^2}{2}\right)t-v\sqrt{t}} \quad x_0 e^{\left(r-\frac{v^2}{2}\right)t+2v\sqrt{t}} \quad x_0 e^{\left(r-\frac{v^2}{2}\right)t-2v\sqrt{t}} \quad \cdots ④$$

図 1 のオレンジの直線が μ、四本の破線がゆらぐ範囲④（-2σ、-σ、+σ、+2σ）である。青色の線が S&P500 の実績値、紺色の線がサンプル・パス、つまり②式に任意のパラメーターを代入して実際に計算したときの値である。

図 1　r=0.0003, v=0.00329, r-v^2/2=2.946x10^{-4}

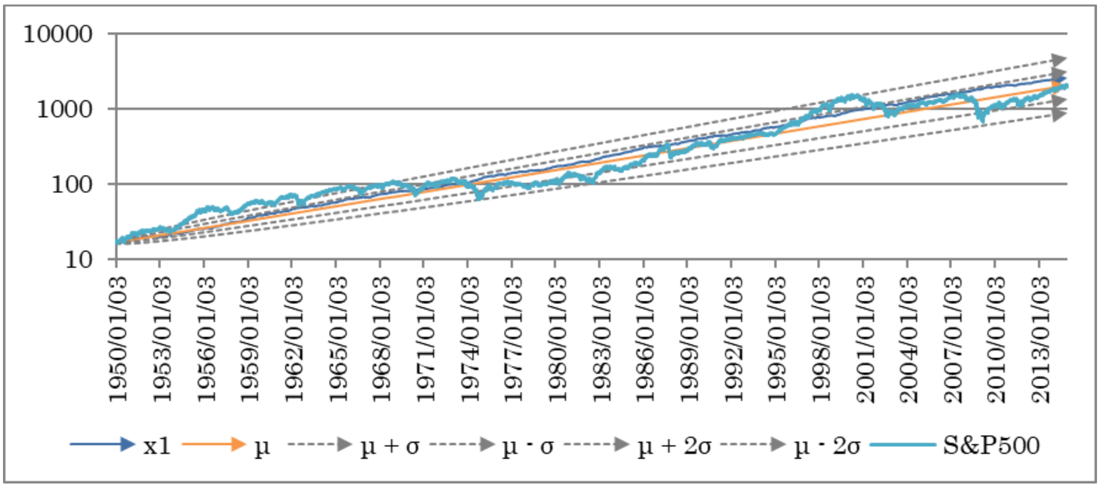


図 2　r=0.0004, v=0.01452, r-v^2/2=2.946x10^{-4}

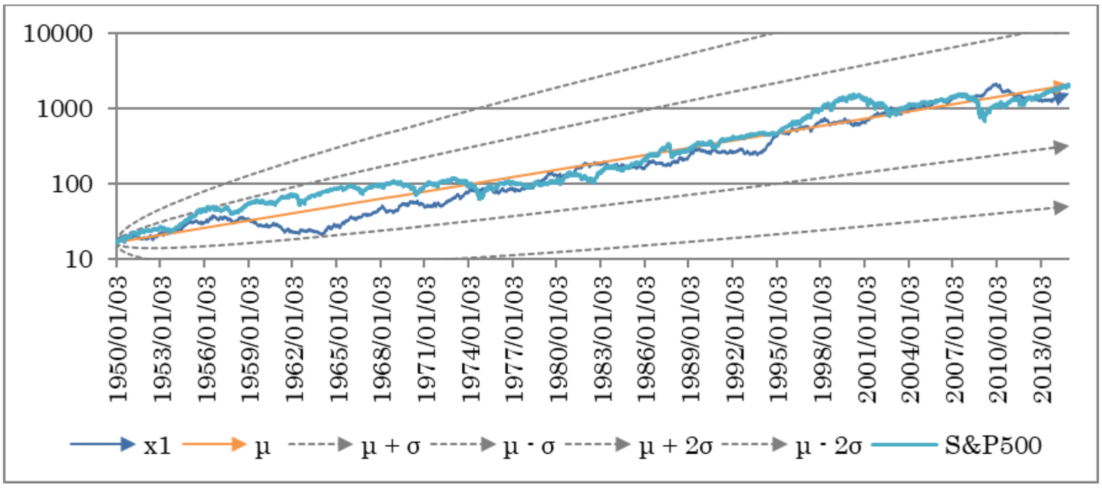
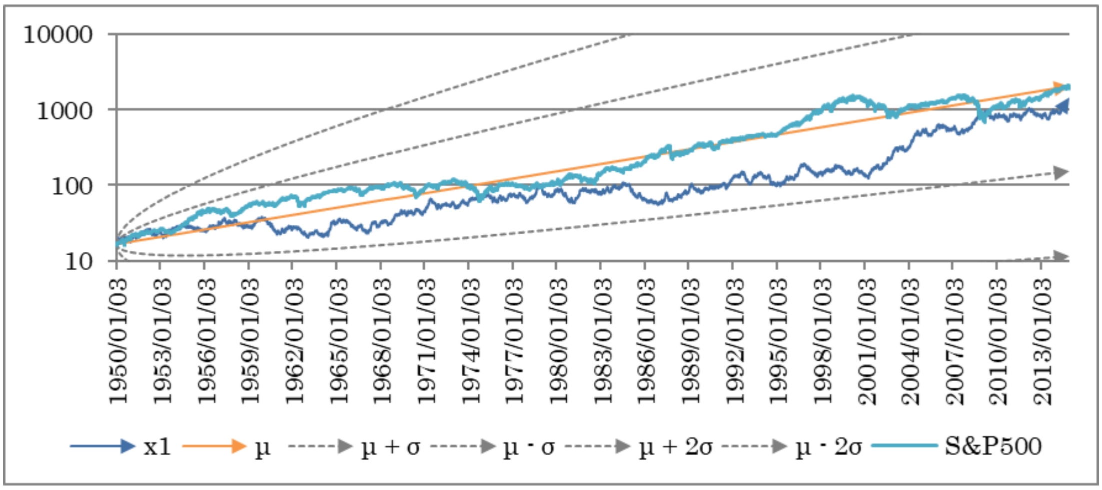


図 3　r=0.0005, v=0.02027, r-v^2/2=2.946x10^{-4}



v の値が大きくなるにつれてゆらぎ度合いが大きくなっていることが分かる。図 1 のサンプル・パス（紺色の線）は中央値 μ（オレンジの直線）にへばりついているが、v の値を大きくした図 2、図 3 はサンプル・パスが μ から少しずつ離れていくのが分かる。

このことを数値的に確認するために、それぞれのパラメーターの組み合わせにおける揺れ幅の度合い（μ 線とのかい離幅）を測定してみる。その方法は以下の三ステップ。

a. μ 線（オレンジ）と S&P500（水色）の差（二乗の平方根）を求める。
b. 同様に、μ 線とそれぞれのパラメーター（r と v）で試算した値の差（二乗の平方根）を求める。
c. b.で求めた平方根の中で実際のかい離幅 a.に近いパラメーターの組み合わせを探す。

実際にやってみると、

$a = \sqrt{\sum (S\&P500 - \mu)^2}$ = 25,183

次に、表 1 の五通りの任意の r と v の組み合わせで、

表 1

	a	b	c	d	e
r	0.000300	0.000350	0.000400	0.000425	0.000450
v	0.004000	0.010000	0.014500	0.016000	0.017500
$r\text{-}v^2/2$	0.000292	0.000300	0.000295	0.000297	0.000297

それぞれ百回の試行を繰り返してその出現値 b.の分布を集計したものが表 2。

表 2

	a	b	c	d	e
0~10000	22	1	0	0	0
10000~20000	32	22	7	3	3
20000~30000	25	17	19	17	8
30000~40000	8	13	17	11	10
40000~50000	7	9	7	12	13
50000~60000	3	9	12	12	14
60000~70000	0	13	9	9	5
70000~80000	3	2	6	8	8
80000~90000	0	0	2	1	4

a.=25,183 に近い値が最も多く出る r と v の組み合わせは、c の

$$r = 0.0004,\ v = 0.0145 \quad ・・・⑤$$

の近辺であることが分かる。これは確かに、先の図２の組み合わせに近い値である。初期値 x_0=16.66 とパラメーター⑤をそれぞれ②式に代入すると、

$$x_t = 16.66\ e^{(0.0002948)\,t + 0.0145\,B(t)} \quad ・・・⑥$$

変化率 dB(t)/dt（ブラウン運動）はエクセルのランダム関数 =RAND() を使用し、以下のとおり算出する（NORMINV 関数の条件設定方法に関する説明はここでは省略）。

dB(t)/dt＝NORMINV(RAND(),0,0.6)

$$B(t_n) = B(t_{n-1}) + dB(t_n)/dt$$

以上でブラウン運動項 B(t) の数値化ができたので、あとはその値を⑥式に代入すれば翌日以降の指数を計算することができる。表３はその一部。

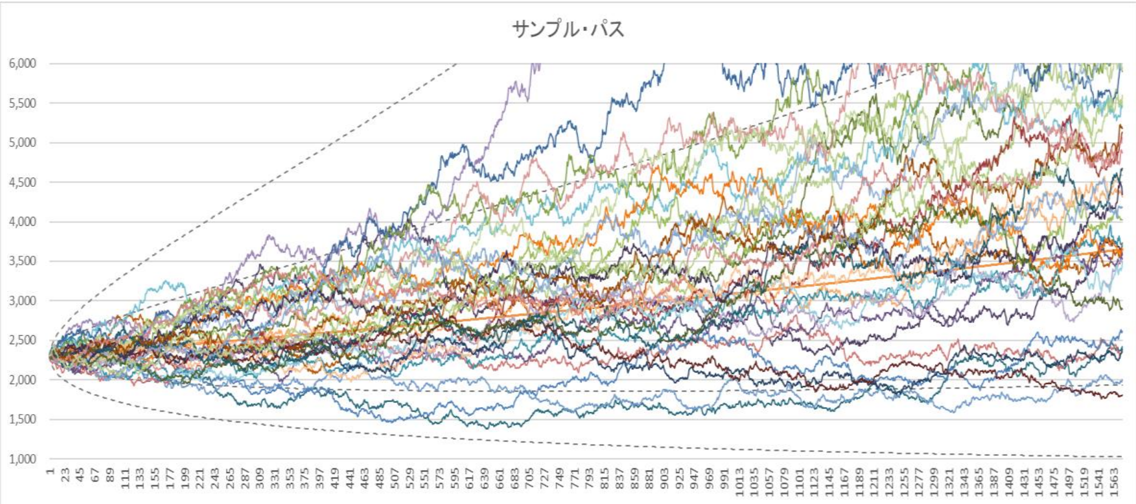
表 3

t	x	変化率	B(t)	$\frac{dB(t)}{dt}$
0	16.66			
1	16.64	-0.146%	-0.110	-0.110
2	16.62	-0.094%	-0.187	-0.077
3	16.71	0.545%	0.135	0.321
4	16.50	-1.262%	-0.677	-0.812
5	16.44	-0.364%	-0.924	-0.246
6	16.64	1.207%	-0.192	0.731
7	16.83	1.177%	0.521	0.713
8	16.95	0.663%	0.916	0.395
9	16.91	-0.200%	0.773	-0.143
10	16.63	-1.676%	-0.302	-1.075

註）変化率はエクセルのファンクションキー (F9) を押すと都度変化するので、計算結果を記録する場合は「コピー→形式を選択して貼り付け→値貼り付け」する。

以後、再現する指数の動きを「サンプル・パス」と呼ぶ。ではここで実際にコロナ・ショック後の株価指数がどう動くかシミュレートしてみよう。初期値は 2020 年 3 月 20 日の 2,304.92 米ドル。確かに④式で得られたσ線の範囲内でゆらいでいるのが分かる（図４）。

図 4



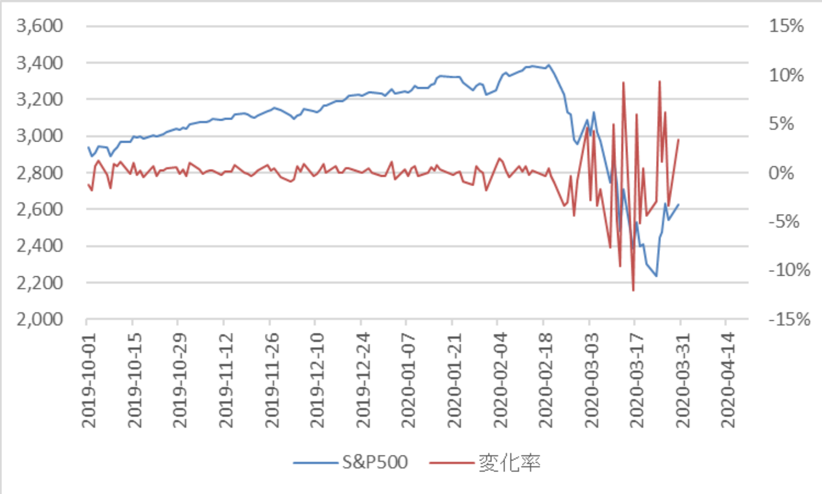
コロナ・ショック後のサンプル・パス。このななから実際の動きに近いパスはどれか？が知りたい。

２）コロナ・ショックからの回復予測

2020 年 2 月 14 日に史上最高値の 3,380.16（終値ベース）を付けた S&P500 はそれ以降不

安定な動きを見せ始め、三月に入ると乱高下を繰り返し、同月末には最高値から 30%近くも値を下げた（図 5）。

図 5



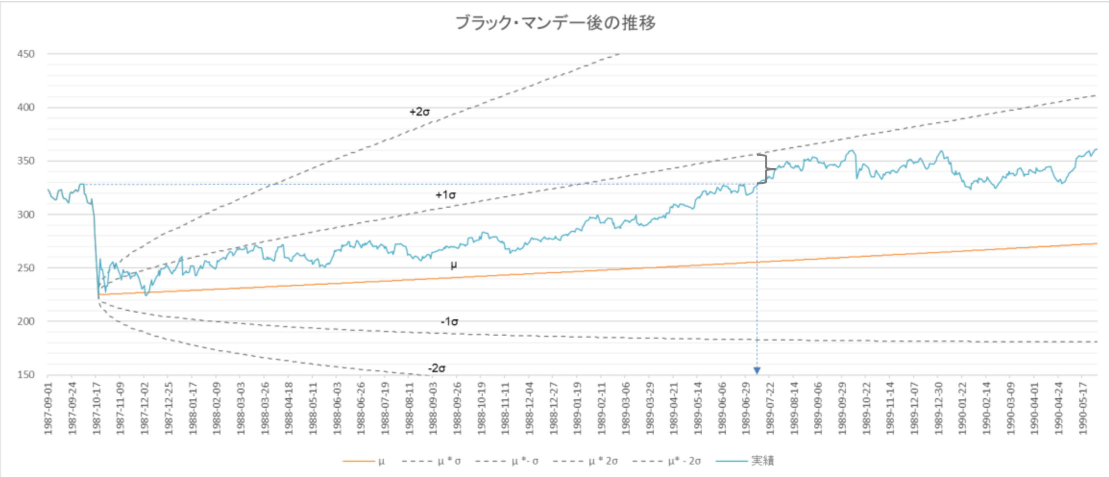
では、落ちた株価はいつ回復するのか。表 4 は近年に発生した二回の暴落と今回の暴落の比較表である。下落率はリーマン・ショックの 48.2%が最大であるが、底値に到達するまでに 210 日を要している。一方、ブラック・マンデーの下落率は 31.5%であるが、わずか二週間で底値に到達している。2020 年 4 月 3 日現在、コロナ・ショックの底値は、2020 年 3 月 23 日の 2,237.40 で、下落率はブラック・マンデーを上回る 33.9%、下落に要した日数は 38 日でブラック・マンデーに比べると下落スピードはやや緩やかであるがリーマン・ショックに比べると急激である。

表 4

			コロナ・ショック	リーマン・ショック	ブラック・マンデー
a	暴落前の最高値に到達した日		2020/2/14	2008/8/11	1987/10/5
a'	暴落前最高値		3,386.10	1,305.32	328.08
b	暴落後底値に到達した日		2020/3/23	2009/3/9	1987/10/19
b'	暴落時底値		2,237.40	676.53	224.84
c	落差	b-a	-1,148.70	-628.79	-103.24
d	下落率	c/b	-33.9%	-48.2%	-31.5%
e	a が b に当たるするまでに要した日数	a-b	38	210	14
f	一日当たりの平均下落率	d/e	-0.893%	-0.229%	-2.248%
g	暴落前最高値に回復した日			2011/2/1	1989/7/11
g'	g の終値			1,307.59	328.78
h	回復に要した日数	g-b		694	631

1987 年のブラックマンデー後の動きを図 6、2008 年のリーマン・ショック後の動きを図 7 に示した。ここで株価が μ やσ線に対してどの位置で回復していったか？に注目する。ブラック・マンデー（図 6）では μ 線と+1σの間、リーマン・ショック（図 7）では +1σと+2σの間で推移している。

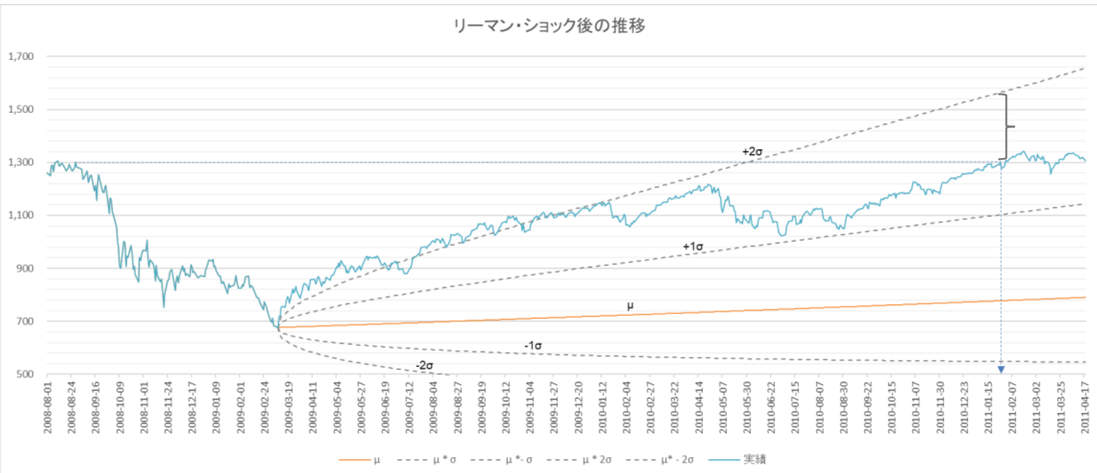
図 6



暴落前の最高値と暴落後の底値の落差 31.5%。底値からは μ と+1σ の間で回復を続けている。

一方、リーマン・ショックはブラック・マンデーよりも下落率は大きく下落期間も長かったが、回復に要した時間はブラック・マンデーとさほど変わらなかった。下落後、ブラック・マンデーが+σ線上を推移した一方、リーマン・ショックでは+2σのライン上を動いていることから下落率と下落期間はその後の反発力の蓄積と関連する可能性がある。

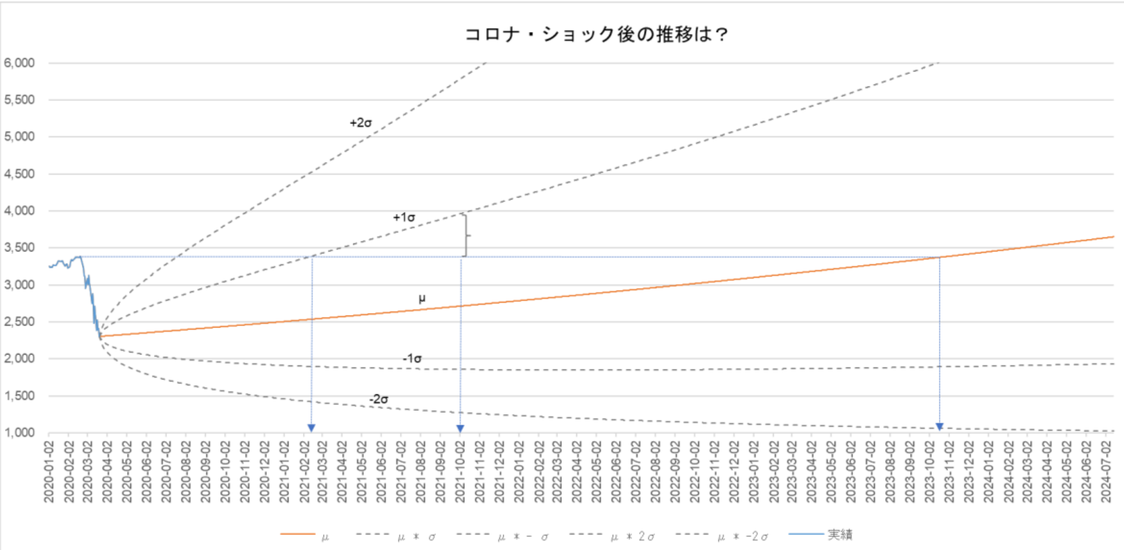
図 7



暴落前の最高値と暴落後の底値の落差 48.2%。底値からは+1σ と+2σ の間で回復しており、ブラック・マンデーを上回る回復力を示した。

コロナ・ショックは今のところブラック・マンデーを若干上回る下落率であった一方で、下落のスピードはブラック・マンデーよりも緩やかであったことから、今後はおおよそ μ 線と+1σ 線の中間あたりを推移する可能性が高い。よって、具体的には、図８より株価が暴落前の値に戻るのは一年後の 2021 年の 2 月から一年半後の 10 月あたりではないかと予測される。

図８



コロナ・ショック後は+1σ 寄りで推移するとすれば、株価が下落前のレベルの戻るのは一年後の 2021 年 2 月～一年半後の 2021 年の 10 月ごろと予測できる。

おわりに

コロナ・ショックがすでに底値に達しているのか、継続中なのかはいまの時点ではわかない。リーマン・ショックは七か月間に二番底、三番底を経験しており、コロナ・ショック後も同じような推移を示す可能性もある。底値、つまり初期値（x_0）をどこにするかによって回復までの道のり（μ 線と σ 線の間の動き）の解釈は多様化するが、予測方法は同じなので、ご興味のある方は付随のエクセル・テンプレートの初期値（x_0）を適宜入れ替えて検証していただければと思う。

＜付随資料＞

S&P500 近未来予測用エクセル・テンプレート