

<第四章> ロトカ・ボルテラ競争モデルの拡張 その1 (競走から共同へ)

「正」の競争係数はこれまでにみたように競争相手の成長を抑制する働きをする。では、この係数を「負」にするとどうなるかを本章でみてみよう。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} (2.1)$$

第二章でみたように、 a は x が y の増殖に与える影響の度合い、 b は y が x の増殖に与える影響の度合いを表す係数である。 a と b が負の値をとると、一種のときより分母の K に対して分子が小さくなる。分子が小さくなれば $(1-(x+by)/K_1)$ と $(1-(ax+y)/K_2)$ の値自体は大きくなるため増殖の変化率 dx/dt 、 dy/dt は大きくなる。つまり x と y は競争相手の存在によってその成長が助長される。生物界においては「共生」がこれに当たる。ビジネスにおいては、たとえばアウトソーシングは仕事を出す側と受ける側の互惠関係によって成立する一種の共生である。業界団体、商店街、専門店街などがなくならないのは同業者や競争相手が集まることによって、単独よりも安定がもたらされているからだと考える方が自然である。競走相手を避けて人通りの少ない路地に店を出すよりも、同業者が多くても人通りの多い商店街に店を出した方が売上が伸びることも容易に想像できる。一方、競走相手を M&A によって自社に取り込んでしまえば競走自体がなくなる。これも「正の競走係数」を「負の競走係数」に転換する戦略であると捉えることもできよう。

では、早速、その効果を数値で確かめてみよう。第二章と同じ初期値の組合せを使い、競走(共同)係数だけを仮に 0.5 から -0.5 に変化させたときに x と y の個体数がどのように変化するかを示したものが図 24 である。第二章の図 15-1 は七つの足(初期値)をもつ蜘蛛のような形をしているが、図 24 はその七つの足のつま先をピンで留めておいてその交点を右上に引っ張り上げた(竹ぼうきの)ような形をしている。お互いの競走係数が 0.5 のときの共存点(交点座標)は (53,53) であったものが、競争係数を負の -0.5 にするとその三倍にあたる (160,160) に増える。つまり、二種が競走している場合の総個体数は 106、共同すれば 320 である。

	成長係数		環境容量		競争係数	
x	r_1	0.5	K_1	80	a	0.5 → -0.5
y	r_2	0.5	K_2	80	b	0.5 → -0.5

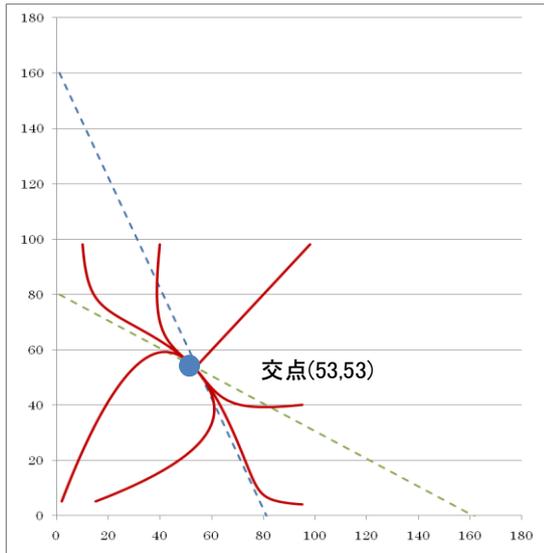


図 15-1 $r_1, r_2=0.5, K_1, K_2=80, a, b=0.5$

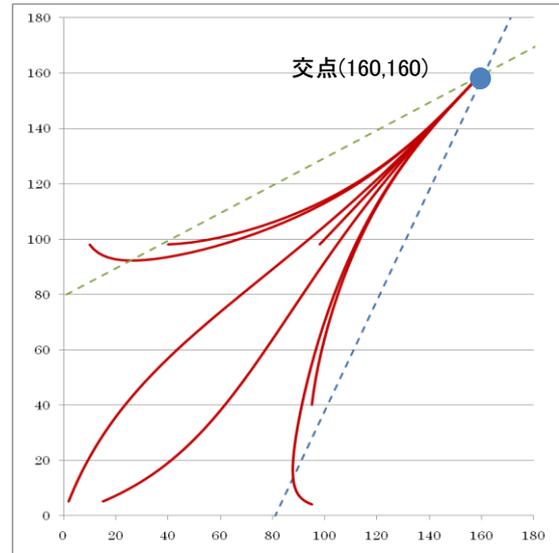


図 24 $r_1, r_2=0.5, K_1, K_2=80, a, b=-0.5$

ちなみに、手をつなぐ個体の数を二種から三種、五種へと増やしたときに個体数が競争係数の増減に対してどう変化するかをグラフ化したものが図 25 である。競争係数の負の値を少しずつ大きくすると個体数は指数関数的に増大することが分かる。

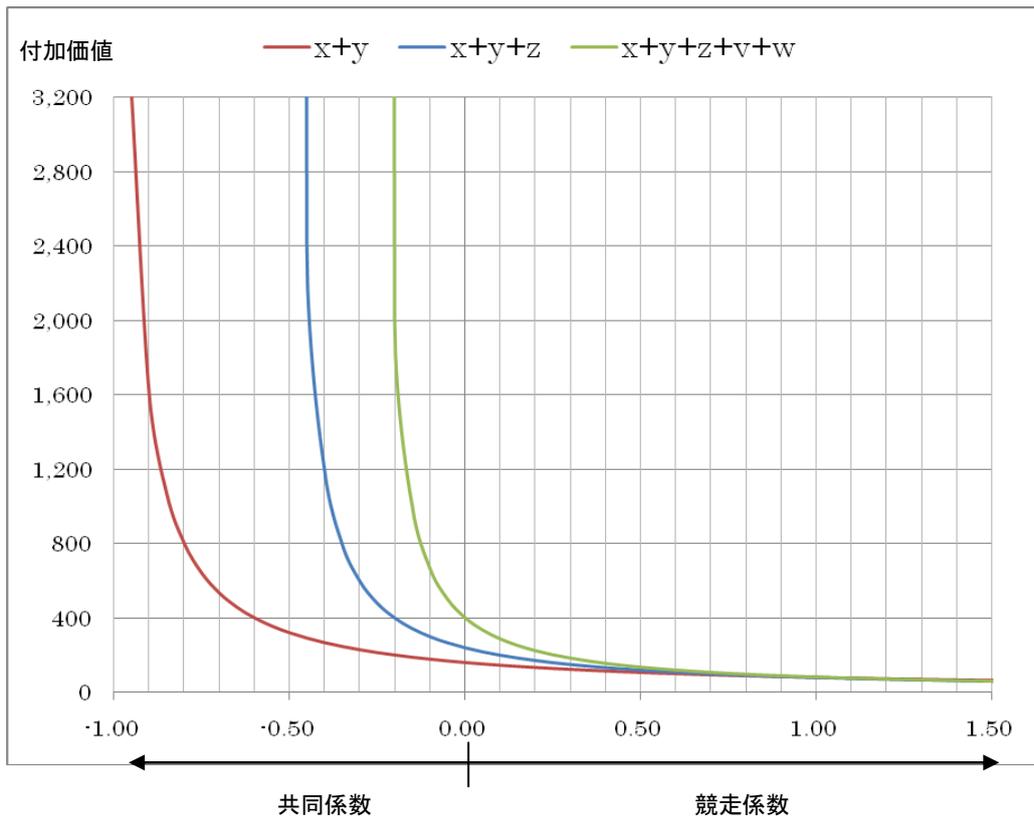


図 24 各エージェントの成長係数=0.5, 各環境容量=80, 各競争係数=-0.5

ここで、競争係数が正の値のモデルを「競争モデル」、負の値のモデルを「共同モデル」と呼ぼう。そ

してその共同モデルを構成する個体数を小から大へと増やすことによって表れる現象を順に検証していこう。

<同業者の共同>

仮に独立して部品を製造している地理的にも近い小規模だが技術力の高いメーカーが三社あったとしよう。「競走モデル」は三社がお互いに競走相手の成長を抑制するために何らかの行動を起こすこと、たとえば、その中の一社が売値を下げることに相当する。しかしながら、他社に値下げを追随されればその効果は一時的なものに過ぎない。これに対して共同モデルは、たとえば三社が共同で高価な工作機械を購入することに相当する。工作機械を共同利用すれば、購入資金も損益上の固定費も単独で購入する場合の三分の一となり、生産性と品質の向上によって三社が産み出す付加価値も上昇する。

三社を x 社、y 社、z 社として、その付加価値が上昇していくイメージは図 26 のとおりである。競走係数がゼロの場合がお互いに独立している(相手に何ら影響を与えない)ときで、各社の付加価値は一社の環境容量の総和 (240=80x3) に等しい。ところが、お互いに相手の成長を抑制する行動に出ると競走係数が右側の正の領域へ移動してしまい、結果的には三社の総付加価値も抑制されてしまう。競走係数が 1.0 に達すると三社の付加価値の総和は一社の環境容量と等しくなる。つまり三分の一になってしまう。一方、お互いに共同すれば、競走係数が左側の負の領域に入り、三社の付加価値は一気に大きくなっていくことが分かる。たとえば係数が -0.20 における総付加価値は 400 であるので三社がばらばらに経営していたとき (240) の 1.7 倍に増える。競走ではなく共同するという一種のパラダイムシフトを受け入れることによって社の命運が大きく左右されることを示すものである。

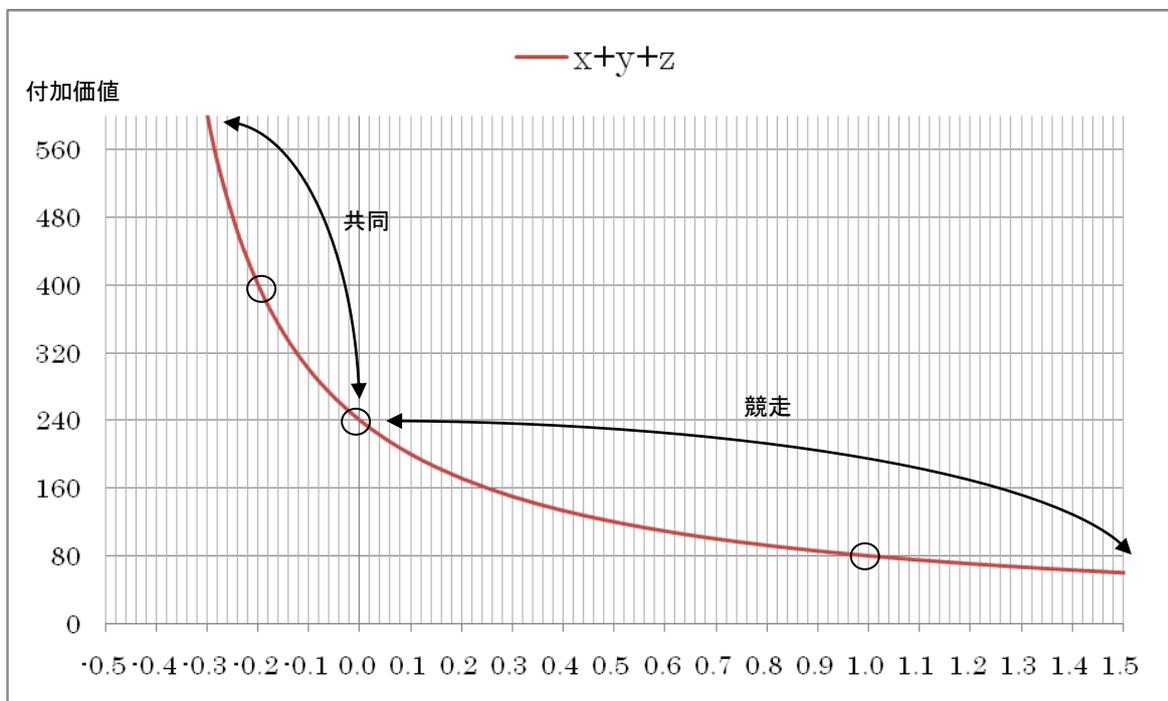


図 26 $r=0.5$, $K=80$ 縦軸が三社の総付加価値(V)、横軸が競争係数(α)

<クラスターの構成>

共同モデルは「ネットワーク形成モデル」と解釈すればクラスターの形成とその付加価値の創出を説明することができる。ここでネットワークを構成する個体をエージェントと呼び、エージェントがお互いに手を結んでクラスターを構成するとき総付加価値がどのように変化するかを実際に計算してみよう。前提条件は以下とする。

エージェントの数： 10

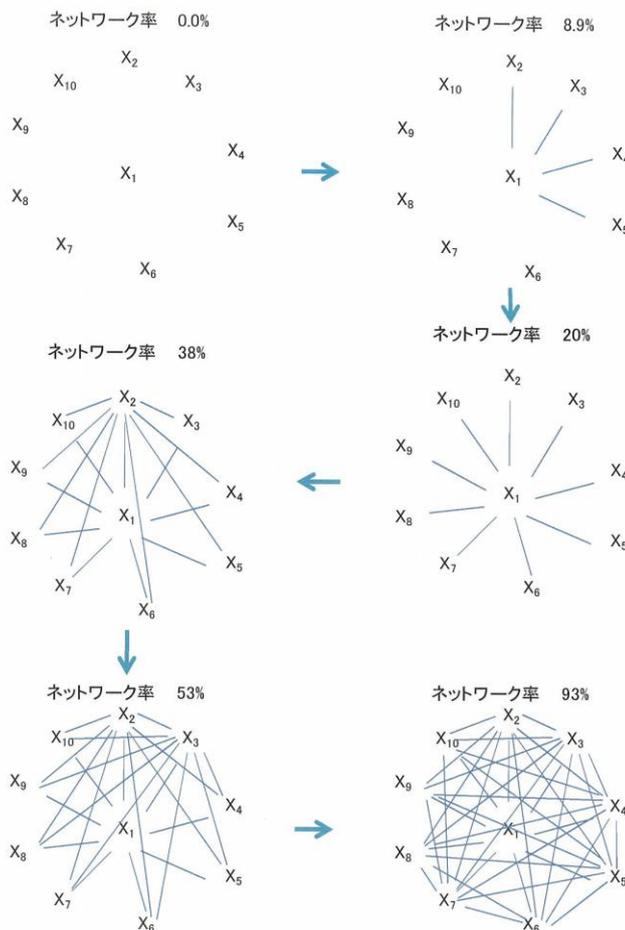
成長係数： 0.7

環境容量： 各 100

共同係数： -0.1

注) 計算に使用する微分方程式は第三章で業界全体の未来予測をした (3.2) と同じ。

エージェントが手をつなぐ様子(イメージ)



エージェントがまったく手をつなぐお互いなら関係をもたないときは、付加価値の総和は環境容量の総和である 1,000 (100 × 10 エージェント) を超えることはないが、各エージェントが少しずつ手をつなぎはじめてネットワークを形成すると付加価値は環境容量の総和を超えて徐々に大きくなっていく。図 27 はその様子を示したものである。エージェントが手をつなぐ割合が増えると指数関数的に付加価値が増えることが分かる。

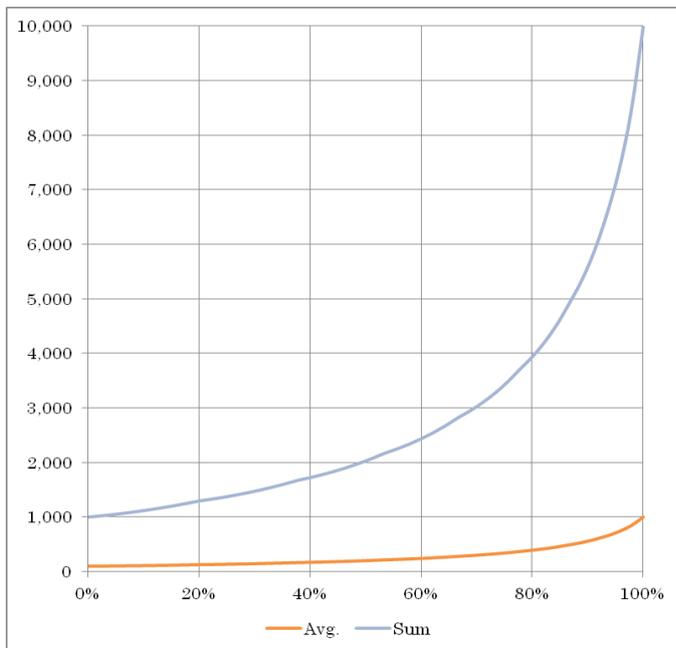


図 27 横軸はエージェントが手をつないでいる割合、縦軸は総付加価値(V)

<M&Aによる成長>

M&Aは競走相手を取り込んで競走を共同に転換する戦略と捉えることができる。図 24 より、競走係数が負の領域においては、個体種が二種より三種、三種より五種の方が成長速度が格段に速いことがみとれる。これはM&Aによって企業規模を短期間に増大させていく様子によく似ている。図 27 はソフトバンクの連結売上と営業利益の推移である。同社は 1981 年にパソコン用のパッケージソフトの流通事業で起業した。孫社長が絶えず目線を上げて環境容量 K のより大きな業界へと進出し会社を進化させていったことが分かる。売上は創業 19 年で 1 千億円、16 年で 5 千億円、24 年で 1 兆円を超え、29 年で 3 兆円に達している(2010 年の営業利益は国内第三位)。この成長をまず第一章のロジスティック曲線よって分析したものが図 28 である。五千億円のプラト一期をボーダフォンの買収によって脱して一気に成長、現在は第二のプラト一期(三兆円)に入っていることがわかる。

一方、同社のM&A戦略は同業者を自社に取り込んで、競走を共同へ次々に転換していく共同モデルの実践であるとみることもできる。同社が 2010 年に発表した新 30 年ビジョンにおいて孫社長は「戦略的シナジーグループが分散、分権してお互いに自律し協調し合うウェブ型組織にしたい。出資比率 20%から 40%のゆるやかな資本提携で、志を共にする集団を作る。そういうパートナー戦略で 30 年以内に 5 千社に拡大したいと考えています。」と発表している。もう一度、図 24 をみていただきたい。競走係数が正の領域で商売をしている限り、同業者との競争によって大きな成長は見込めないが、負の領域へ入った途端に短

期間に大きく成長することができる事が分かる。

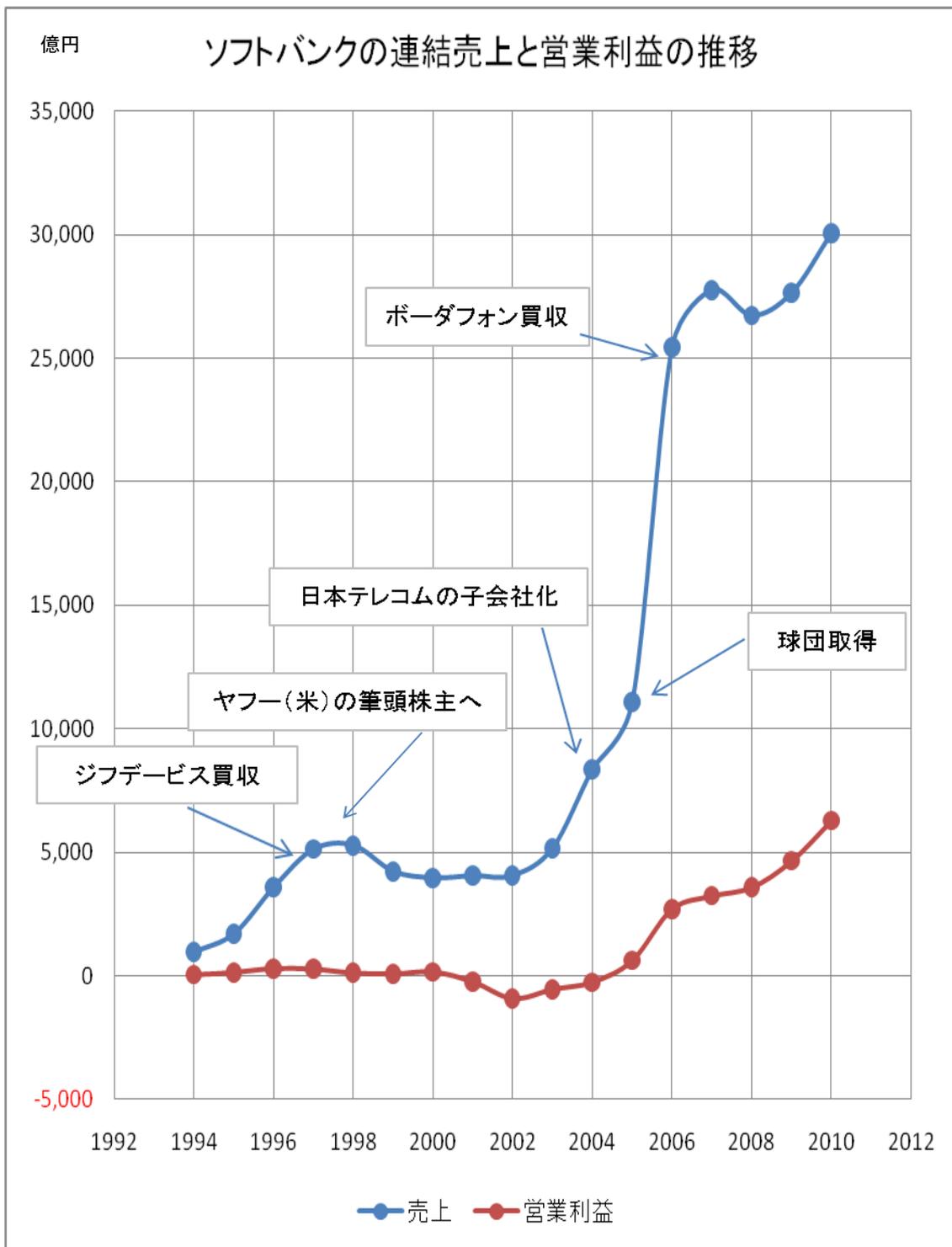


図 27 ソフトバンクの連結売上と営業利益の推移 (同社ウェブサイトより)

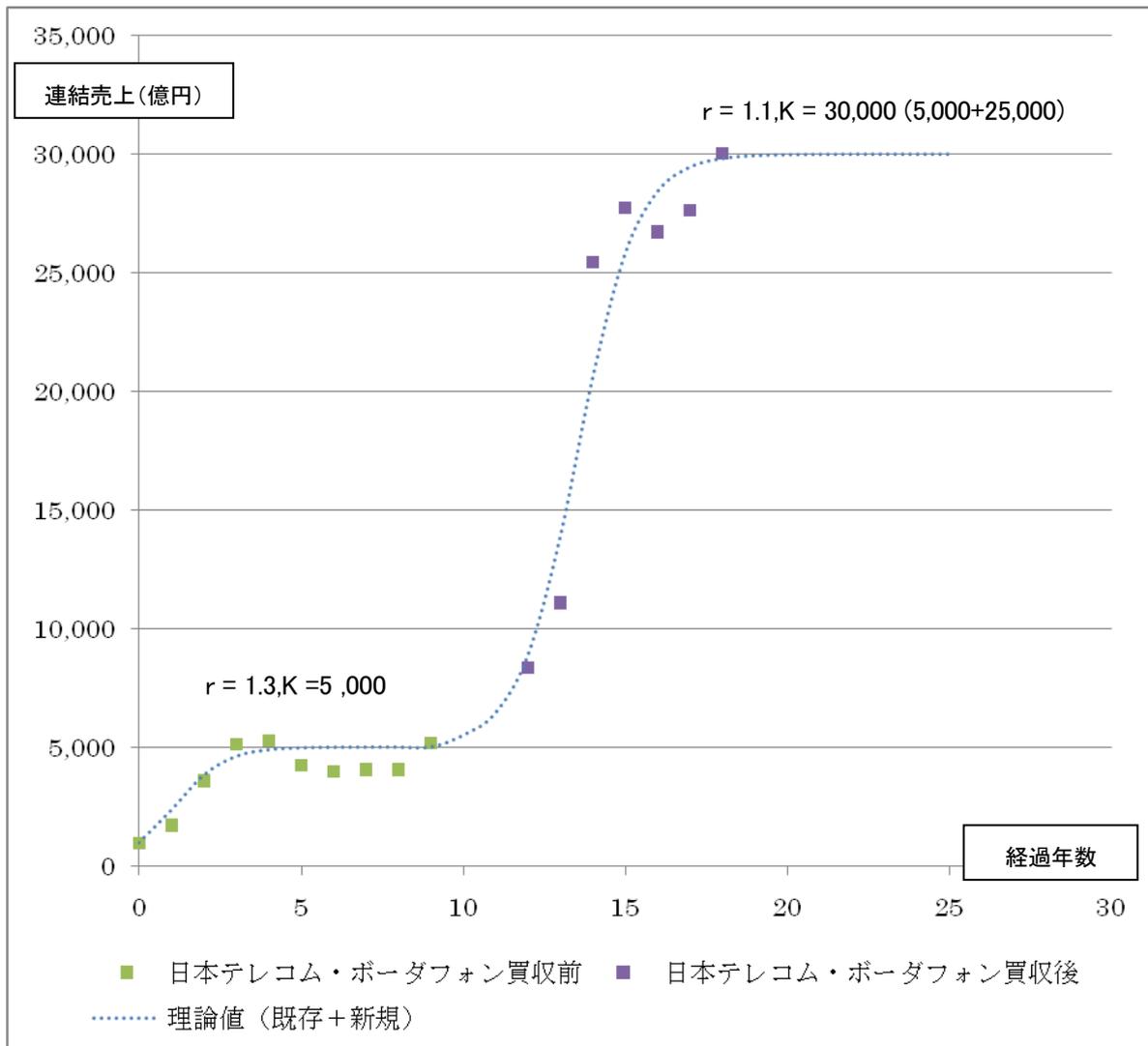


図 28 ソフトバンク連結売上のロジスティック曲線分析、縦軸が連結売上(億円)、横軸は経過年数 (0=1994 年)

ではここで、孫社長のいう「ゆるやかな資本提携」の効果を数字で検証してみよう。提携する(手を組む)相手を以後はエージェントと呼ぶことにする。

図 24 は微分方程式 (2.1) にふたつの係数、環境容量($K=80$) と競走係数(-0.5) を代入して数値計算して得た解をグラフ化したものである。エージェントが二つ (x と y) の場合が赤い曲線であるが、ふたつのエージェントが造りだす付加価値曲線(V) と環境容量 (K)、競走係数 (α) の関係は、

$$V = 2K/(1 + \alpha) \quad (4.1)$$

で表すことができる。 $K=80$, $\alpha=0.5$ のとき、先にみたように二種の数値計算解に基づく共存点は (53,53)、二種合計で 106 である。これを (4.1) 式を使うと数値計算をすることなく、係数を代入するだけで、

$$V = 2 \times 80 / (1 + 0.5) = 160 / 1.5 = 106$$

と求めることができる。同じく、 $\alpha = -0.5$ のときは、数値計算解による二種の共存点は (160, 160)、合計 320 だが、(4.1) 式を使うと、

$$V = 2 \times 80 / (1 - 0.5) = 160 / 0.5 = 320$$

と即座に求めることができる。

これを二種以上の複数のエージェントに拡大し、一般式を得れば共同モデルによる付加価値効果の計算がたいへん便利になる。エージェント数を n とし、競走係数 $\alpha < 0$ においてエージェントが産み出す総付加価値 (V) の近似値は次の数式で得ることができる。

$$V \doteq nK / (1 + \alpha)^{2n-3} \quad (n=1, 2, 3, \dots, \alpha < 0) \quad (4.2)$$

表 10 が数値計算解と数式 (4.2) で計算した値の対照表である。図 29 はそれらをグラフ化したものである。

α	2 社		3 社		5 社	
	$2K/(1+\alpha)$	x2 数値計算解	$3K/(1+\alpha)^3$	x3 数値計算解	$5K/(1+\alpha)^7$	x5 数値計算解
-0.20	200	200	469	400	1,907	2,000
-0.10	178	178	329	300	836	667
-0.09	176	176	318	293	774	625
-0.08	174	174	308	286	717	588
-0.07	172	172	298	279	665	556
-0.06	170	170	289	273	617	526
-0.05	168	168	280	267	573	500
-0.04	167	167	271	261	532	476
-0.03	165	165	263	255	495	455
-0.02	163	163	255	250	461	435
-0.01	162	162	247	245	429	417
-0.005	161	161	244	242	414	408
-0.001	160	160	241	240	403	402
-0.0005	160	160	240	242	401	402
-0.0001	160	160	240	246	400	406
-0.00005	160	160	240	251	400	411
-0.00001	160	160	240	255	400	415
0.00	160	160	240	256	400	416

表 10 成長係数 $r=0.5$, 環境容量 $K=80$, 負の競争係数(共同係数) $a=b=\alpha$

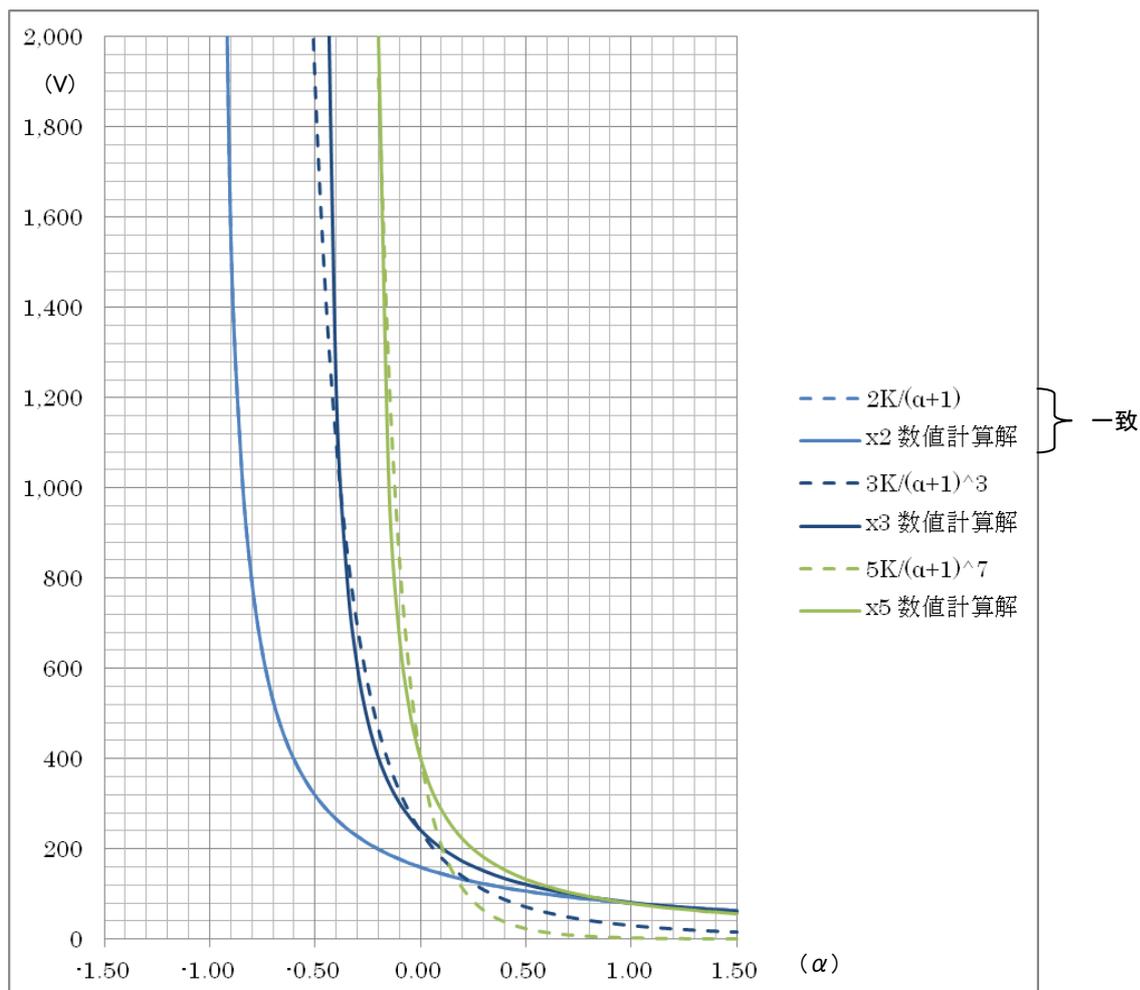


図 29 数値計算解と数式 (4.2) で得られる近似値

縦軸が価値 (V)、横軸が共同係数 (α)。共同モデルでは $\alpha > 0$ の領域は無視する。

ここで、ソフトバンクの 30 年後の企業価値 (株式時価総額) をこの数式によって計算してみよう。まず、5 千社にネットワークを広げるとしているので $n = 5,000$ である。一社あたりの投資額を仮に 8 千万円とする。これをその時点における最大価値、つまり環境容量 K とみなそう。さて、共同係数 α はどのように決めればいだろうか。図 29 から付加価値曲線は n 数が 5 でも $\alpha = 0$ 付近でほぼ垂直に立ちあがっていることが分かる。これは、共同係数の値は n 数が増えるに従い指数関数的に小さい値となるであろうことを示している。よって、仮に共同係数を、

$$\alpha = -k \times 10^{-n} \quad (4.3)$$

と表し、共同係数の桁数をエージェント n 数の桁数の逆数とする。たとえば、エージェント数が 5 の場合はエージェントの桁数は一桁であるから、共同係数の桁数は、 $k \times 10^{-1}$ 。仮に、 k (定数) = 6 とすれば、共同係数 $\alpha = -6 \times 10^{-1} = 0.6$ となる。同様に、エージェントが 5,000 の場合はエージェントの桁数が四桁であるので共同係数 α は $-6 \times 10^{-4} = -0.0006$ となる。これで三種類の係数が得られたのでそれぞれ (4.2) 式に代入すると、ソフトバンクの 5 千社に対する投資によってもたらされるであろう総企業価値は、

$$V = 5,000 \text{ 社} \times 8 \text{ 千万円} / (1 - 0.0006^{2 \times 5000 - 3}) \doteq 161 \text{ 兆円}$$

となる。共同係数 α が $-7 \times 10^{-4} = -0.0007$ のときは 439 兆円となる。(エージェントの n 数と創出される付加価値 V と共同係数 α の相関関係については表 11 を参照)。

表 11(別紙) エージェント数 (n) と共同係数 (α) の付加価値 (V) 創出マトリクス

ちなみに孫社長は 30 年ビジョンで世界トップ 10 に入るためには時価総額が 200 兆円くらいに成長している必要があるとしている。その様子をロジスティック曲線によって表現すると図 30 のとおりとなる。なお、企業価値計算には複利計算がよく使われるが、複利とロジスティックではその成長の軌跡が大きく異なる。

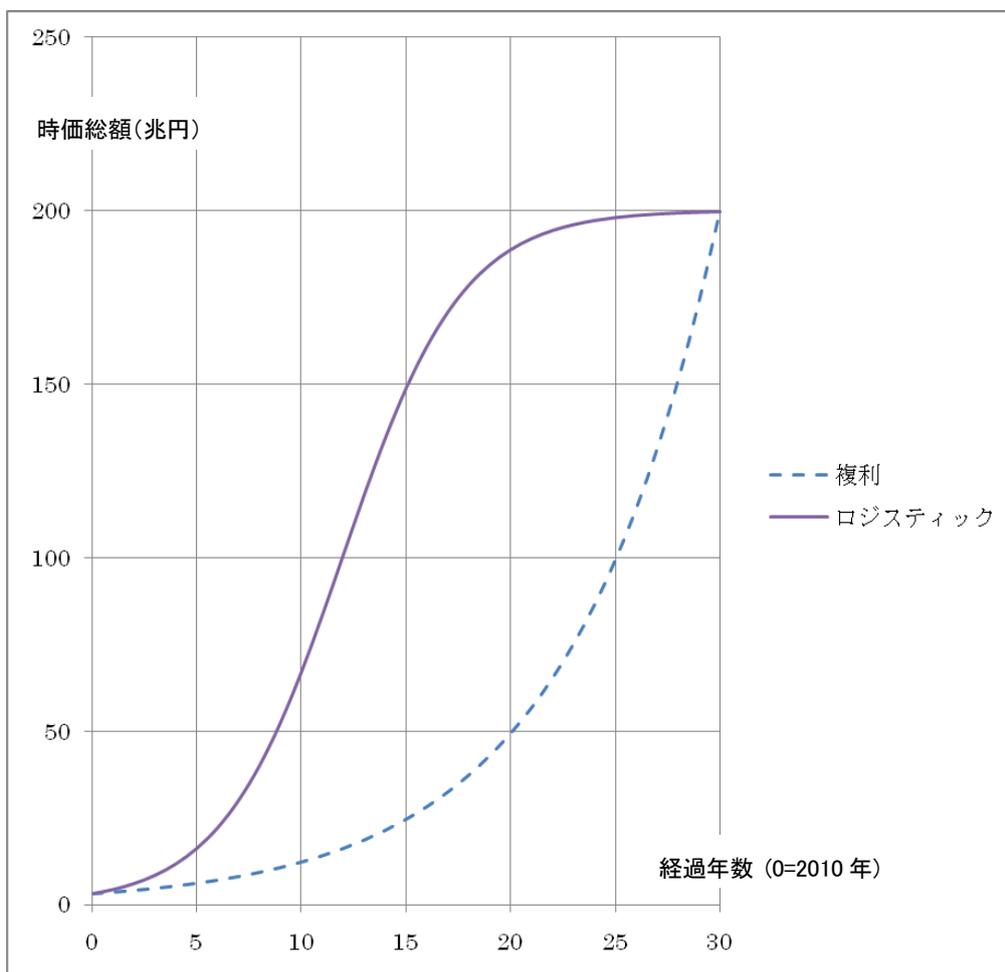


図 30 $r=0.4$, $K=200$ 兆円, $V_0=3$ 兆円、複利率=15%

<第五章> ロトカ・ボルテラ競争モデルの拡張 その2 (ゆらぎ)

帝国データバンクの資料から 2000 年から 2011 年までの倒産件数の平均をとると毎年およそ 1 万社だと分かる。一方、総務省の資料によれば日本の企業数はおよそ 4 百万社とあるので、倒産率は 0.25%である。これを多いとみるか少ないとみるかは議論の分かれるところであろうが、第二章で環境容量と競走係数の組合せによって、一方が他方に淘汰されるパターンをいくつかみたあとでこの統計値をみると思ったよりもずっと少ないと感じるのではないだろうか。現実のビジネスにおいては共存率が 99.75% もあることになり、モデルが示唆する淘汰は実際にはさほど起こっていないと言わざるを得ない。もちろん、「淘汰」とは必ずしも「倒産」することを意味するのではなく、当該事業からの「撤退」をも含むと考えるべきであろうが、分母も会社の数から事業の数へと増えるので、その比率が大きく変わるとは考えにくい。つまり、現実のビジネスにおいては、お互いに競走はしているものの、圧倒的に共存するケースの方が多いといえよう。この章はなぜ、そうなるのかを数理的に解明することが目的である。

理論の構築に入る前に、もう一度、第一章でみたひとつの企業の成長に立ち戻ってみよう。企業の売上は通常、複数顧客の売上の積み重ねで構成されている。そして、それぞれの売上は毎年順調に成長するとは限らず、減少するものもあるし、増加と減少を繰り返しているものもある。それらを全て足し合わせたものがその企業全体の売上である。図 31 は第一章で引き合いに出したIBCレンタル事業の顧客別売上の推移を示したものである。あらゆる顧客 (1~10) の売上が絶えずゆり動いていることが分かる。図 32 はそれらの個別の売上进行を全て足し合わせた売上の推移である。全ての波が合成されてひとつの大きな波になっていることが分かる。

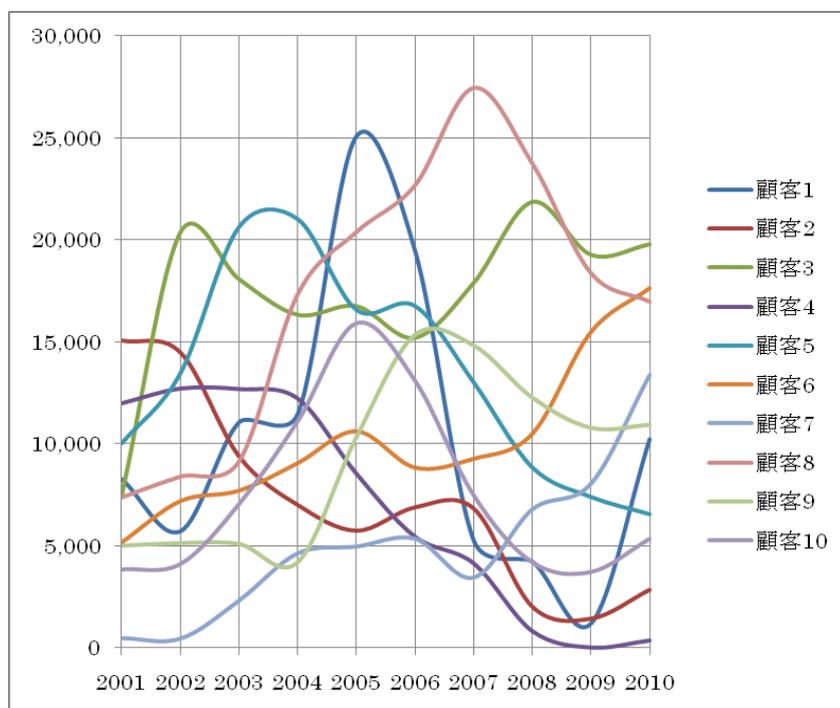


図 31 一企業内の顧客別売上のゆらぎ

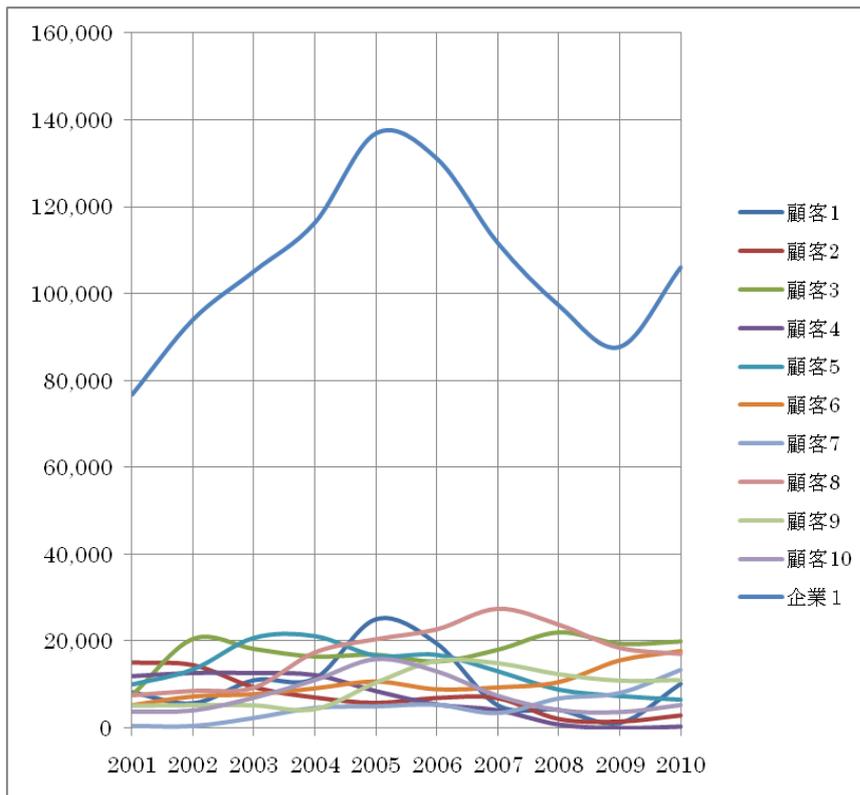


図 31 一企業の売上は顧客別売上のゆらぎが合成された波である。

そしてその企業の波が業界の中にまたいくつもあって、それらが足し合わされることによって業界全体のゆらぎとなる。そして、それが他の業界の波と重なり合って、一国のゆらぎとなる。このように、景気変動は突き詰めると、一企業の中の顧客別の売上変動にまでたどりつき、その変動は第二章でみたとおり、企業間同志の競争係数によってもたらされる。つまり、景気変動は競争係数が絶えず変化することによって生じるマイクロ波が合成されて出来上がるマクロ波によって起こるという仮説が成り立つのである。

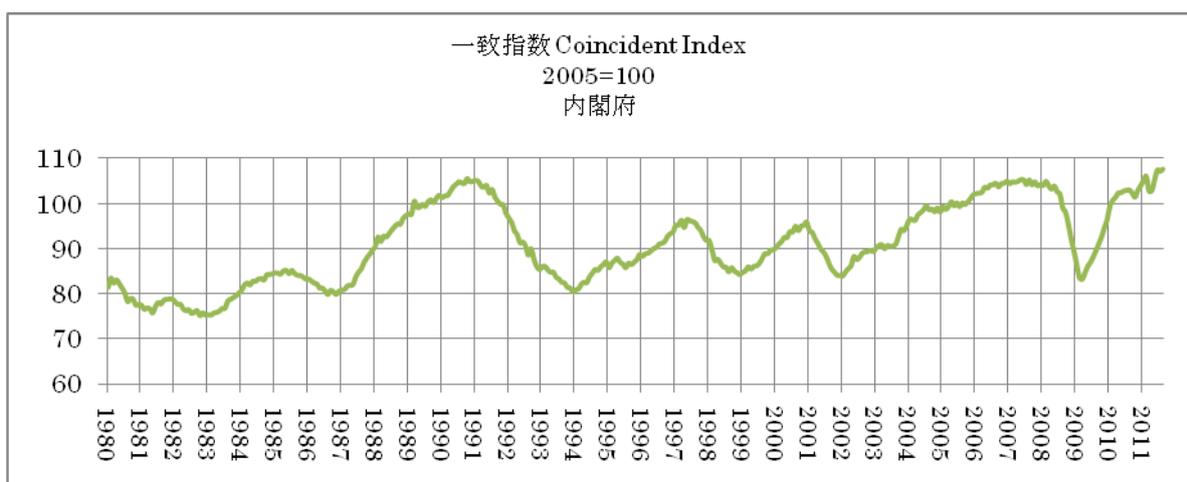


図 33 資料：内閣府（2005 年を 100 とする景気指数 CI）

前章では、「正」の競争係数を「負」にした場合をみたが、それらが必ずしもどちらか一方に留まって

いるとは限らない。「昨日の敵は今日の友」という諺があるように、ある時期までは競走していたが、今は協力し合っているということもよくある。戦略を誤って競走相手のある期間、利することになれば、その間は競走係数が「正」から「負」へ切り替わったことになるし、戦略にかかわらず、営業マンが代わっただけで商売が取れたり、取られたりするものである。このように現実のビジネスにおいては競走係数が常に一定ということの方が少なく、絶えず「ゆらいでいる」のである。強者もゆらぐ、そこに弱者が生き残るチャンスがある。これが、先にあげた低い倒産率の原因ではないだろうか。では、以下にそれを数理的に検証してみよう。

<成長係数のゆらぎ>

競走係数や環境容量にゆらぎを与える前に成長係数からみていこう。第二章の基礎理論でみたとおり成長係数 r は二社の将来には何ら影響を与えることはなかったが、ゆらぎを与えるとどうなるであろうか。微分方程式 (2.1) を (5.1) のように修正する。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x(1-(x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y(1-(ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 \alpha (1+\cos w_1 t) x(1-(x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 \beta (1+\cos w_2 t) y(1-(ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

この (5.1) 式に以下のパラメーターを入れて、任意の初期値(四通り)で計算して成長の軌跡をグラフ化したのが図 34 である。共存座標はゆらぐ前も後も $(x,y) = (60,50)$ で変わらない。交点座標は第二章でみたとおり、

$$\left. \begin{aligned} x &= (K_1 - bK_2)/(1-ab) \\ y &= (K_2 - aK_1)/(1-ab) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

であり、ここには成長係数の r は含まれない。よって、 r のゆらぎに関わらず共存点は一定である。二社が競走する場合、一方の成長率が低い間に他方が一気に成長することによってもう一方を淘汰してしまうということは起こらないということである。

r_1	0.5	a	0.5		
r_2	0.6	b	0.4	y の位相	3.0
K_1	80	α	0.5	w_1	0.5
K_2	80	β	0.5	w_2	0.4
Δt	0.5				

r_1	0.50	a	1.0000
r_2	0.50	b	0.5000
K_1	80	w_1	0.0000
K_2	80	w_2	0.0000

→ 0.2000

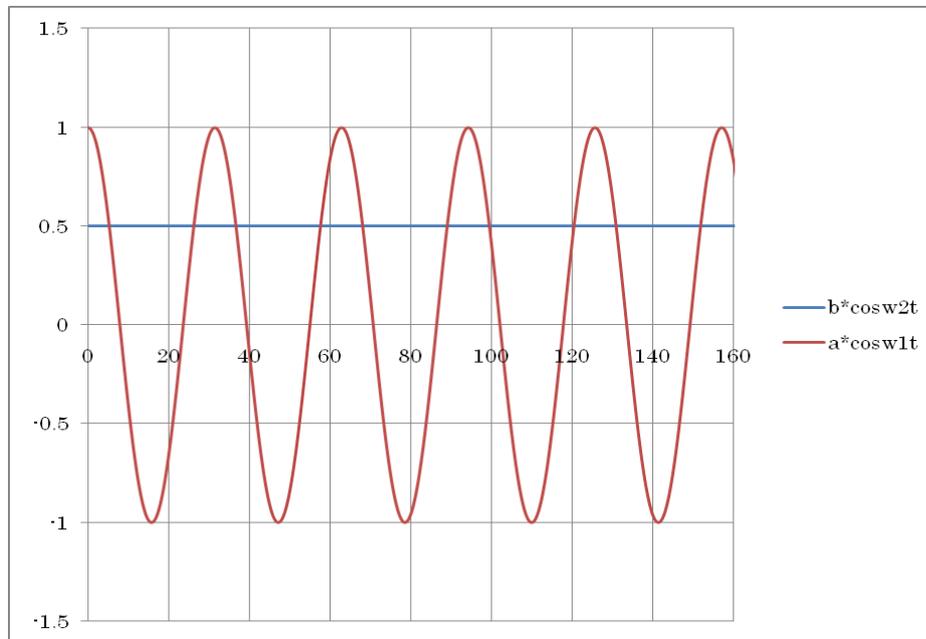


図 34-1 x の競走係数 $a(\cos w_1 t)$ の揺らぎ。

振動がないときには y は x に淘汰されてしまうが、 x がゆらぐことによって y が生き残ることが分かる (図 34-3)。さらに、その動きをよくみると、座標 $(x,y) = (40,80)$ あたりを中心とする楕円軌道であり、ゆらぎがないときには淘汰されてしまっていた y の値の方が x よりも相対的に多くなっていることも分かる。

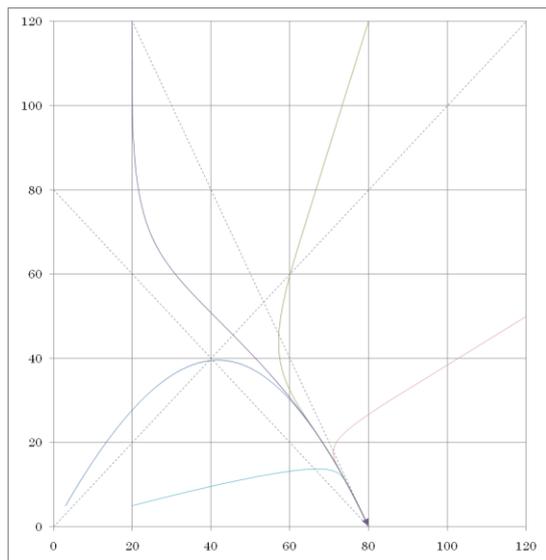


図 34-2 y は x に淘汰されていたが、
 $(r_1, r_2=0.5, K_1, K_2=80, a=1.0, w_1=0, b=0.5, w_2=0)$

→

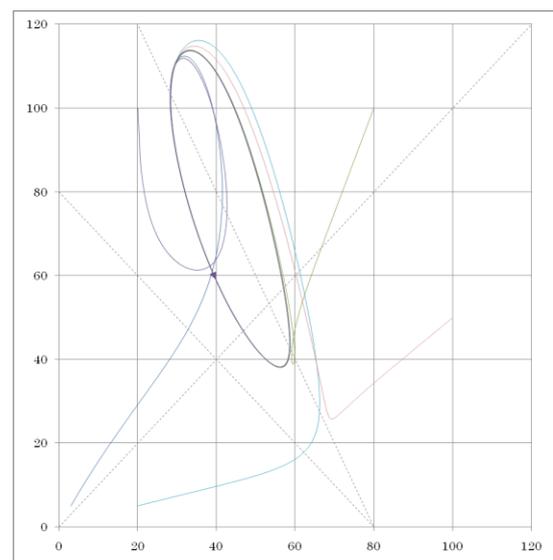


図 34-3 $w_1=0.2$ としてゆらぎを与えると共存する。
 $(r_1, r_2=0.5, K_1, K_2=80, a=1.0, b=0.5, w_1=0.2, w_2=0)$

なぜこのような不思議な現象が起こるのかをみていこう。図 31-1 で分かるように y の成長に影響を与える x の競走係数 $a(\cos w_1 t)$ は 0 を中心として ± 1.0 の範囲でゆらいでいるので、長い時間においては正負が相殺されて $\cos w_1 t = 0$ になると解釈してみよう。 $w_2 = 0$ より、 $\cos w_2 t = 1$ であるので、(5.2) 式は、

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x(1-(x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y(1-y/K_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

となり、 y は元のロジスティクス方程式に戻る。つまり、 y は x から影響を受けることなく環境容量一杯まで成長できることになる。一方、 x は y から $b = 0.5$ の影響を絶えず受けるので環境容量の半分までしか成長できない。(5.3) 式を図示すると図 35 となり、共存点が $(40, 80)$ であることが分かる。これが (5.2) 式が $(40, 80)$ を中心とする周回軌道を描く理由である。

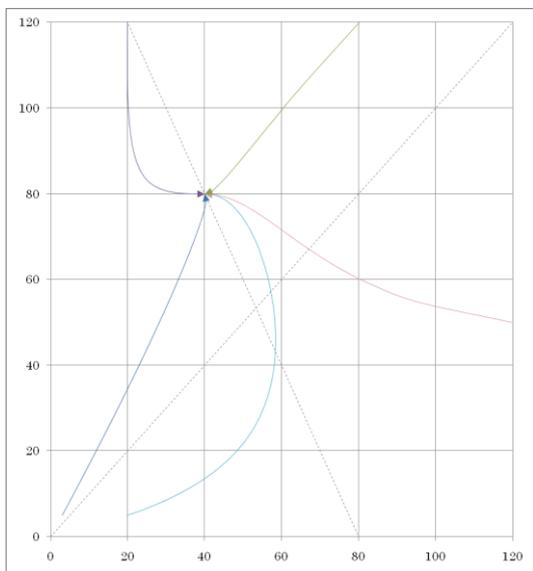


図 35 (5.1) 式から振動を消した (5.2) 式の共存点は $(40, 80)$ 。
 $(r_1, r_2 = 0.5, K_1, K_2 = 80, a = 0, b = 0.5)$

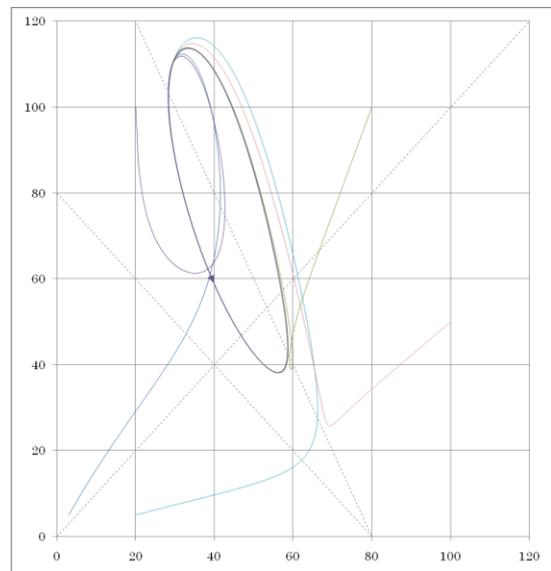


図 34-3 $w_1 = 0.2$ としてゆらぎを与えると $(40, 80)$ を中心に周回軌道を描く。
 $(r_1, r_2 = 0.5, K_1, K_2 = 80, a = 1.0, b = 0.5, w_1 = 0.2, w_2 = 0)$

では次に、 x と y の双方にゆらぎを与えてみよう。まず、二社の競走係数が近い場合の x と y の成長の軌跡を追ってみよう。

r_1	0.50	a	1.1000
r_2	0.50	b	0.9000
K_1	90	w_1	1.0000
K_2	80	w_2	0.9900
Δt	0.50		

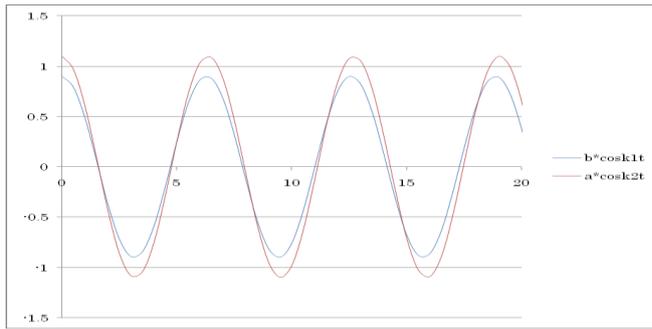


図 36 競走係数のゆらぎ。(a=1.1, b=0.9, $w_1=1.0$, $w_2=0.99$)

図 37-1 がゆらぎがない場合。x の競走係数が高いことから y を淘汰しているが、競走係数にゆらぎを与えると x と y は共存しはじめる (図 37-2)。時間の経過にともない、動く領域は徐々に広がり (図 37-3、図 37-4)、最終的 (t=650) には、x は 35~130、y は 20 ~ 155 の範囲で同じ軌道 (リミット・サイクル) を回る (図 37-5)。二社の売上の合計、x+y の値の動きを時間軸で図示したものが図 38 である。

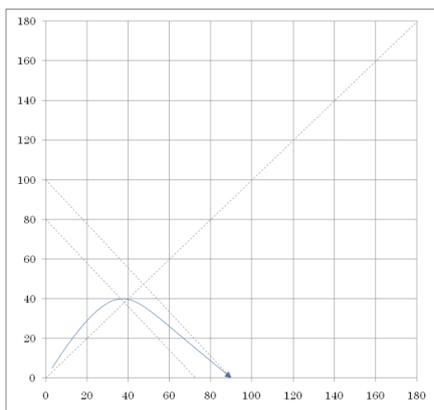


図 37-1

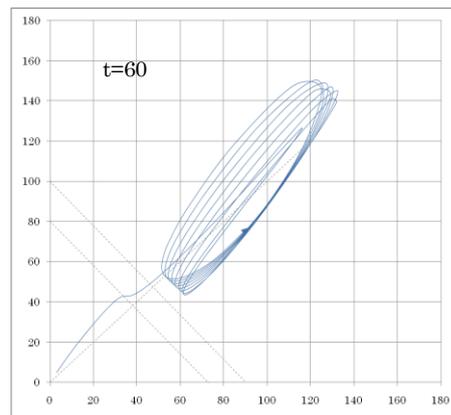


図 37-2

ゆらぎがないと y は x に淘汰されるが、ゆらぎを与えると共存をはじめる。

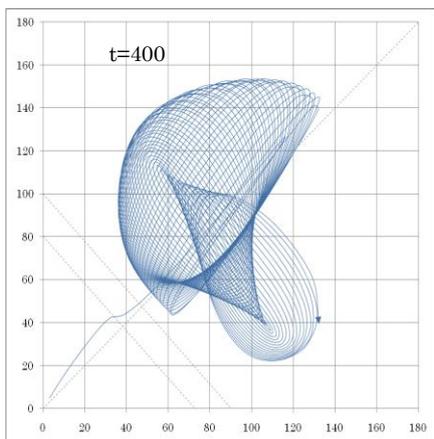


図 37-3

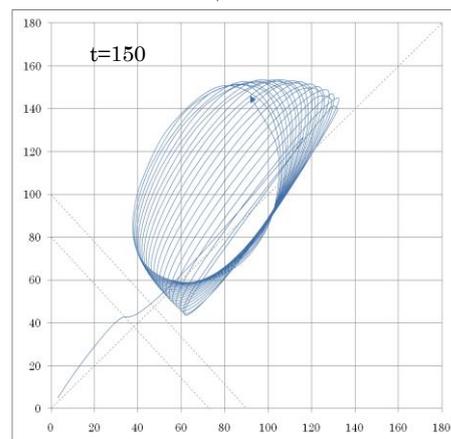


図 37-4

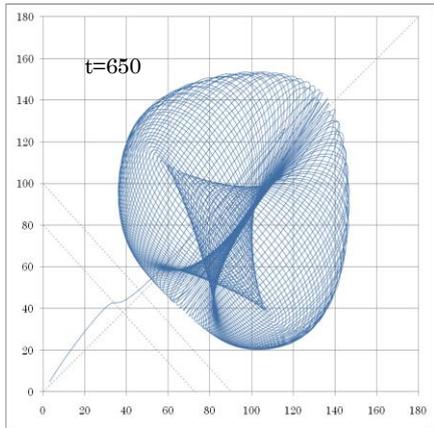


図 31-5

x はおおよそ 35~130、y は 20 ~ 155 の範囲でリミット・サイクルを描く。
 ($r_1, r_2=0.5, K_1=90, K_2=80, a=1.1, b=0.9, w_1=1.0, w_2=0.9$)

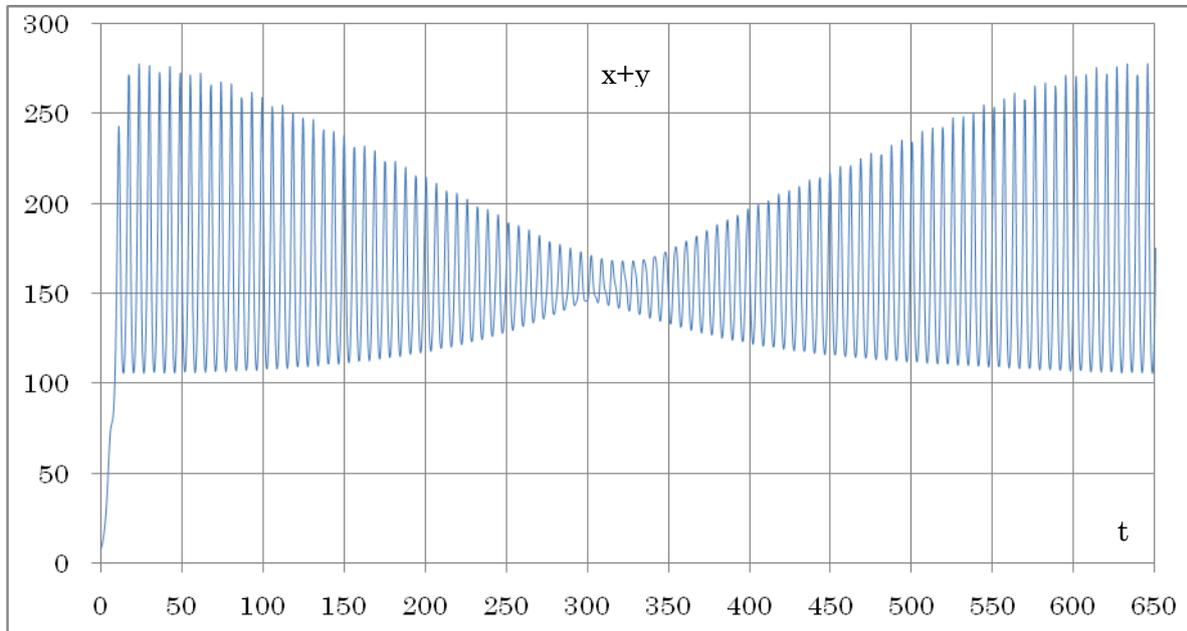


図 38 x+y の時間変化。110~270 を小刻みに振動しながら t=650 で一回転する。

競争係数によって、さまざまな軌道を描くが、たとえば、図 39 のように x と y の振動数差を大きくすると図 39-2 のようなリミット・サイクルを回る。図 40 は二社の売上の合計、x+y の値の動きを時間軸で図示したものである。

r_1	0.50	a	1.1000
r_2	0.50	b	0.9000
K_1	90	w_1	0.8000
K_2	80	w_2	0.4000
Δt	0.50		

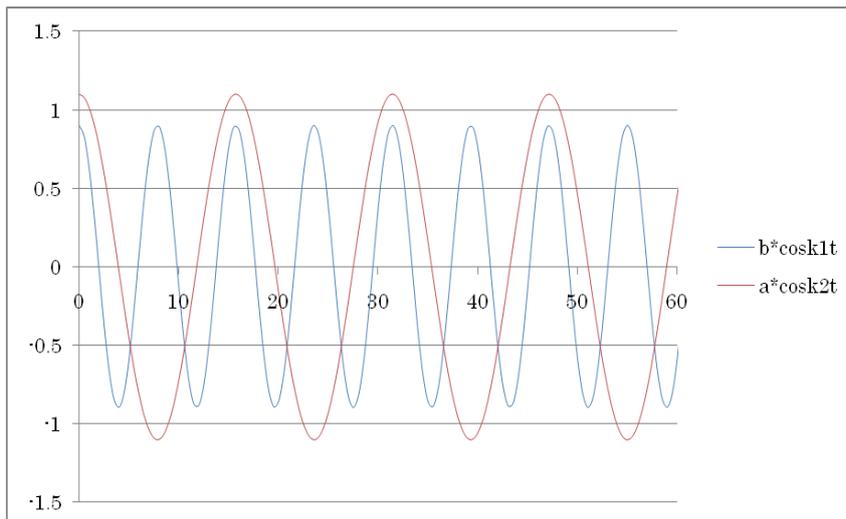


図 39 競走係数のゆらぎ。(a=1.1, b=0.9, $w_1=0.8$, $w_2=0.4$)

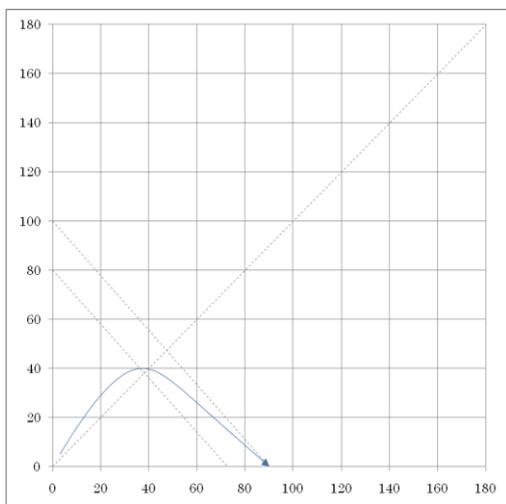


図 39-1 ゆらぎがないと y は x に淘汰される。
 $r_1, r_2=0.5$, $K_1=90, K_2=80$, a=1.1, b=0.9, $w_1, w_2=0$)

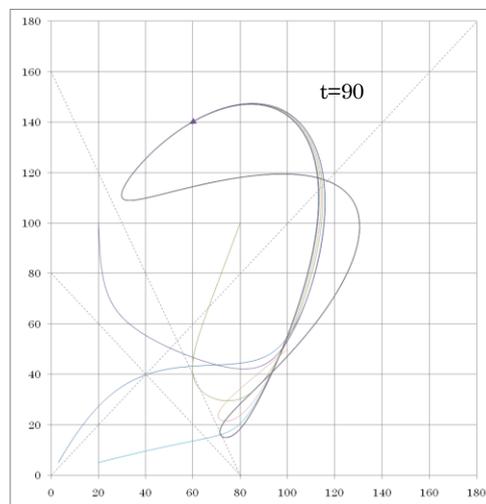


図 39-2 ゆらぎを与えると共存する。
 $r_1, r_2=0.5$, $K_1=90, K_2=80$, a=1.1, b=0.9, $w_1=0.8$, $w_2=0.4$)

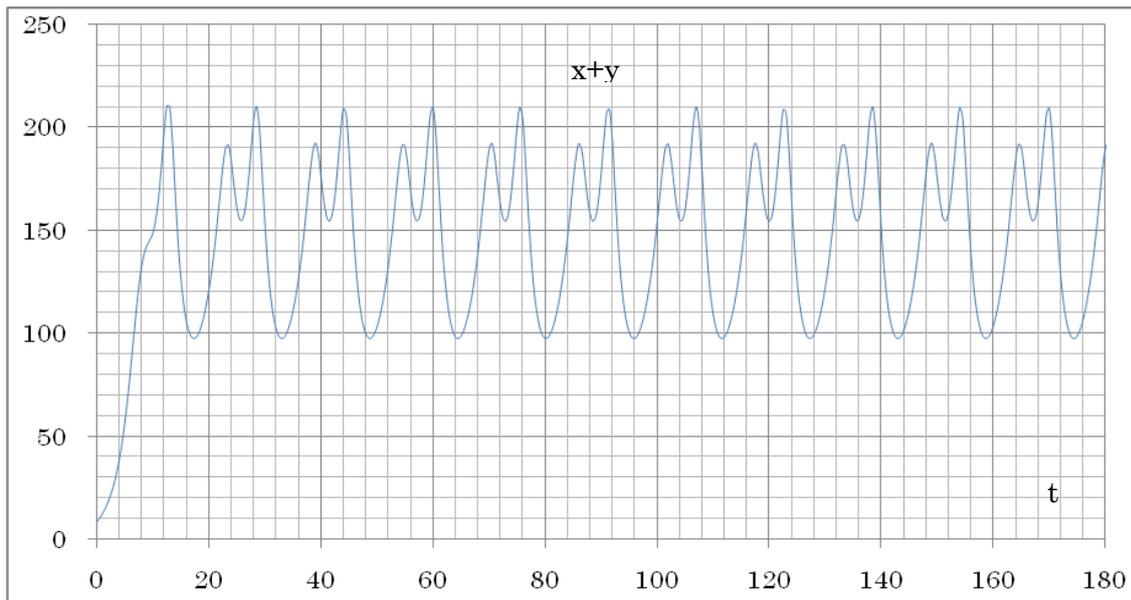


図 40 x+y の時間変化。100~210 を t=16 で一回転する。

では次に、二社から五社に競走の n 数を増やしてみよう。微分方程式は以下のとおり。

$$\begin{cases}
 dx/dt=r_1x(1-(x+b*\cos w_2t*y+c*\cos w_3t*z+d*\cos w_4t*v+e*\cos w_5t*w)/K_1) \\
 dy/dt=r_2y(1-(a*\cos w_1t*x+y+c*\cos w_3t*z+d*\cos w_4t*v+e*\cos w_5t*w)/K_2) \\
 dz/dt=r_3z(1-(a*\cos w_1t*x+b*\cos w_2t*y+z+d*\cos w_4t*v+e*\cos w_5t*w)/K_3) \\
 dv/dt=r_4v(1-(a*\cos w_1t*x+b*\cos w_2t*y+c*\cos w_3t*z+v+e*\cos w_5t*w)/K_4) \\
 dw/dt=r_5w(1-(a*\cos w_1t*x+b*\cos w_2t*y+c*\cos w_3t*z+d*\cos w_4t*v+e)/K_5)
 \end{cases} \quad (5.4)$$

各係数のパラメーターを仮に以下とする。

	成長係数	環境容量	競走係数			
	r	K	振幅		角振動数	
x	0.5	100	a	0.20	w ₁	0.80
y	0.4	90	b	0.20	w ₂	0.70
z	0.3	80	c	0.20	w ₃	0.60
v	0.2	70	d	0.20	w ₄	0.50
w	0.1	60	e	0.20	w ₅	0.40
計		400				

まず最初に、(5.4) の競走係数だけを取り出して上記の振幅と振動数の値を代入し、その時間変化 (図 41) をみてみよう。五つの競走係数が細かく振動しているのが分かる。また、それらの合成波が一定のサイクルで大きく揺れているのも分かる。角振動数からそれぞれの周期を求めて同期する各社のサイクルを計算すると、t = 62.83 においてサイクルが同期し、合成波が最も大きくなることが分かる。以下同様に t=62.83 の倍数時に同期する。(角振動数 $w = 2\pi f$ 。ここで f は振動数。周期 T は振動数 f の逆数、 $T=1/f$ 。よって、周期は角振動数から振動数を求め、その逆数をとることで得られ

る。)

	周期		サイクル	=	同期する時間
x	7.85	x	8	=	62.83
y	8.98	x	7	=	62.83
z	10.47	x	6	=	62.83
v	12.57	x	5	=	62.83
w	15.71	x	4	=	62.83

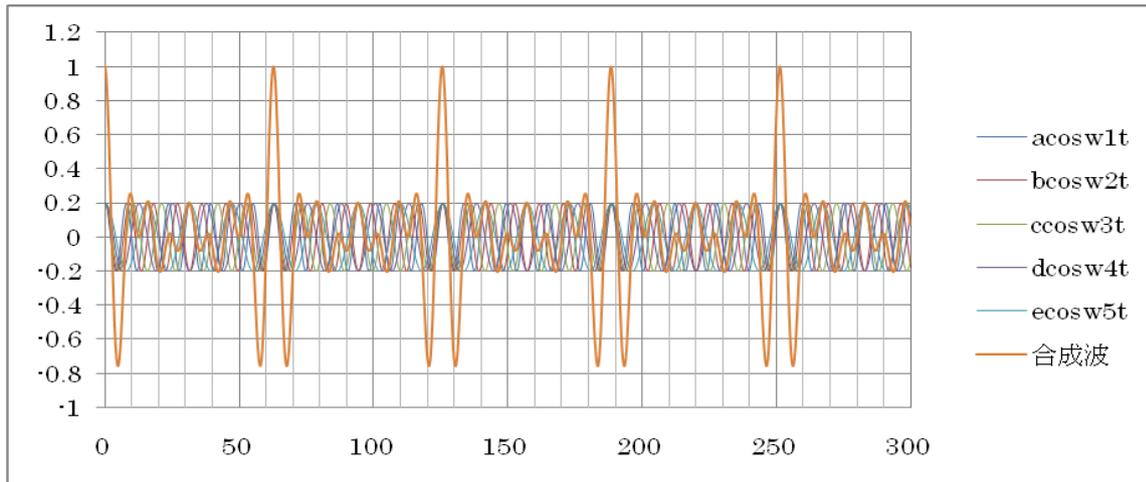


図 41 競走係数のゆらぎの推移。合成波は $t=62.83$ の倍数で同期する。

次に、この競争係数の推移を (5.3) に代入して、五社の売上へ展開してみよう(図 42)。競走係数がプラス(相手の成長を抑制する)に大きく触れるときに五社の売上はマイナス方向へ、競走係数がマイナス(相手の成長を助長する)に振れるときは売上はプラス方向へと振れている、つまり、競走係数の合成波と売上の合成波は時間軸に対しておおよそ線対称の波形となる。

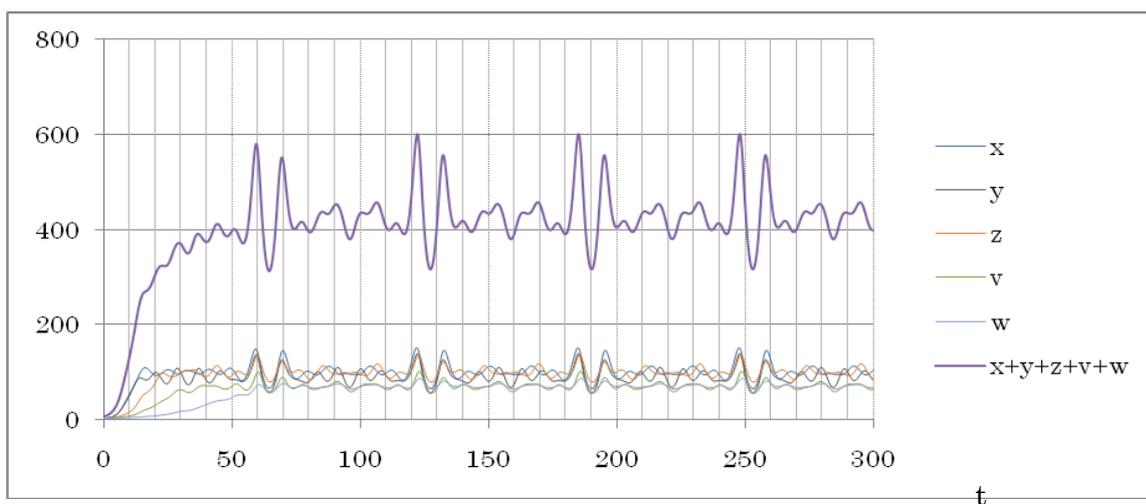


図 42 五社 (x,y,z,v,w) の総売上は競走係数の振動に合わせて振動する。

次に、競走係数の振幅を大きくして、振動数を小さくしてみよう。

	成長係数	環境容量	競走係数			
	r	K	振幅		角振動数	
x	0.5	100	a	0.85	w_1	0.30
y	0.4	90	b	0.75	w_2	0.15
z	0.3	80	c	0.90	w_3	0.10
v	0.2	70	d	0.80	w_4	0.20
w	0.1	60	e	0.70	w_5	0.15
合計		400				

同様に周期を計算し、同期タイミングを計算すると先のケースの二倍程度に長くなっていることが分かる。

	周期	サイクル	同期する時間
x	20.94	x 6	= 125.66
y	41.89	x 3	= 125.66
z	62.83	x 2	= 125.66
v	31.42	x 4	= 125.66
w	41.89	x 3	= 125.66

$t = 125.66$ においてサイクルが同期し、合成波が最も大きくなる。以下同様にその倍数時に同期する。競走係数の振幅の最大値は4.0で先のケース(図41)の四倍に達している。また、五社の総売上も競走係数の振動に合わせて大きく揺らいでおり、その振動幅は先のケース(図42)の二～三倍に達することが分かる。

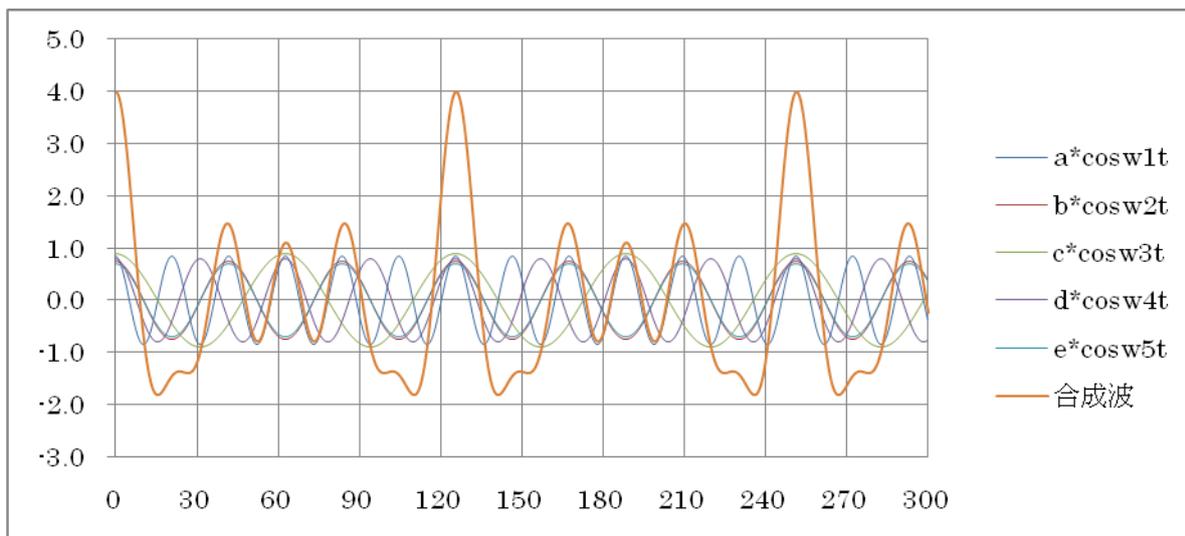


図43 競走係数の振幅を大きくすることによって合成波も増大する。最大値は4.0で図35の4倍に達している。

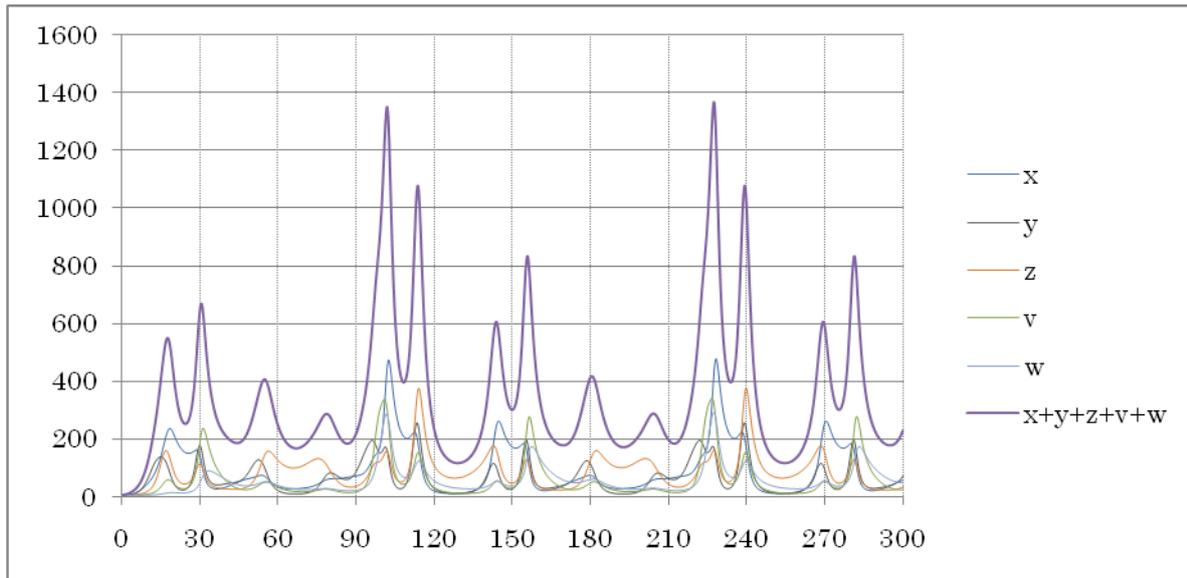


図 44 五社 (x,y,z,v,w) の総売上は競走係数の振動に合わせて大きく振動する。振動幅は図 42 の二～三倍に達している。

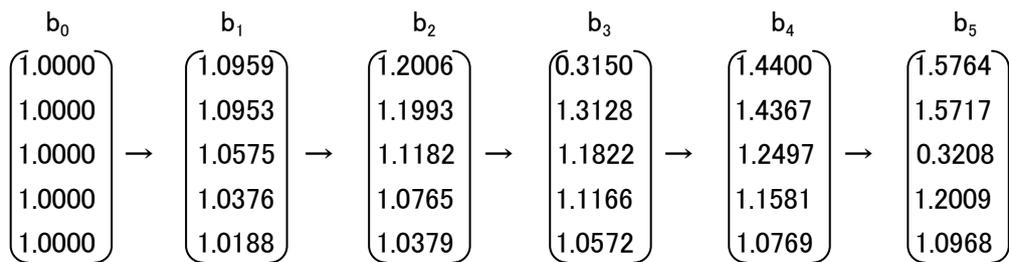
ところで、このような振動の原因は競走係数の変化にあるのだが、これを数式で表現する場合はどうすればよいだろうか。実は、微分方程式 (5.3) の環境容量(分母)の上に乗っている分子は行列と列ベクトルの積で表現できる。簡素化のために、

$$\begin{pmatrix} 1 & b \cos w_2 t & c \cos w_3 t & d \cos w_4 t & e \cos w_5 t \\ a \cos w_1 t & 1 & c \cos w_3 t & d \cos w_4 t & e \cos w_5 t \\ a \cos w_1 t & b \cos w_2 t & 1 & d \cos w_4 t & e \cos w_5 t \\ a \cos w_1 t & b \cos w_2 t & c \cos w_3 t & 1 & e \cos w_5 t \\ a \cos w_1 t & b \cos w_2 t & c \cos w_3 t & d \cos w_4 t & 1 \end{pmatrix} = A_n \text{とおき、} \quad b_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{とおくと、}$$

分子はすっきりと、 $A_n b_n$ と書ける。ここで、 A_n を「競走係数マトリクス」、 b_n を「売上ベクトル」と呼ぶことにする。競走係数マトリクスは初期状態 $t = 0$ から時間 t の経過に従い少しずつ変化する。 $\Delta t = 0.2$ として実際に計算すると、

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.7500 & 0.9000 & 0.8000 & 0.7000 \\ 0.8500 & 1.0000 & 0.9000 & 0.8000 & 0.7000 \\ 0.8500 & 0.7500 & 1.0000 & 0.8000 & 0.7000 \\ 0.8500 & 0.7500 & 0.9000 & 1.0000 & 0.7000 \\ 0.8500 & 0.7500 & 0.9000 & 0.8000 & 0.7000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.7497 & 0.8998 & 0.7994 & 0.6997 \\ 0.8485 & 1.0000 & 0.8998 & 0.7994 & 0.6997 \\ 0.8485 & 0.7497 & 1.0000 & 0.7994 & 0.6997 \\ 0.8485 & 0.7497 & 0.8998 & 1.0000 & 0.6997 \\ 0.8485 & 0.7497 & 0.8998 & 0.7994 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

となる。これを $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \dots$ と連続的に変化させてグラフ化したものが図 43 である。そしてこの競走係数マトリクスの経時変化が、売上ベクトルを $b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_4 \rightarrow b_5 \dots$ へと変化させる。実際に計算すると、



となり、この売上ベクトルの経時変化が図 44 である。

ここでは五社のケースをみているが、この競走係数マトリクスと売上ベクトルを四百万社に拡大すれば、理論上は日本に存在するあらゆる企業の未来予測ができることになる。そして、その合成波が図 33 のような日本の景気変動を示すものとなる。

<環境容量のゆらぎ>

さて、次に環境容量のゆらぎを観察してみよう。まず、環境容量がゆらぐとはどういうことなのか、一種(一社)の基本に戻ってみよう。一種の微分方程式 (1.3) を (5.4) に修正する。コサインに 1 を加えたのは環境容量を負の値にしないための配慮である。

$$dx/dt = rx(1-x/K) \quad (1.3)$$



$$dx/dt = rx(1-x/K(1+\alpha \cos wt)) \quad (5.4)$$

係数を以下のとおり設定して、(5.4) の解曲線(ロジスティック曲線)を描くと環境容量のゆらぎの意味がよく分かる(図 45)。環境容量 $K=80$ に沿って上下にゆらいでいる。角振動数 w の値を大きくすると波の密度が高くなる(変化が速くなる)ことも分かる。

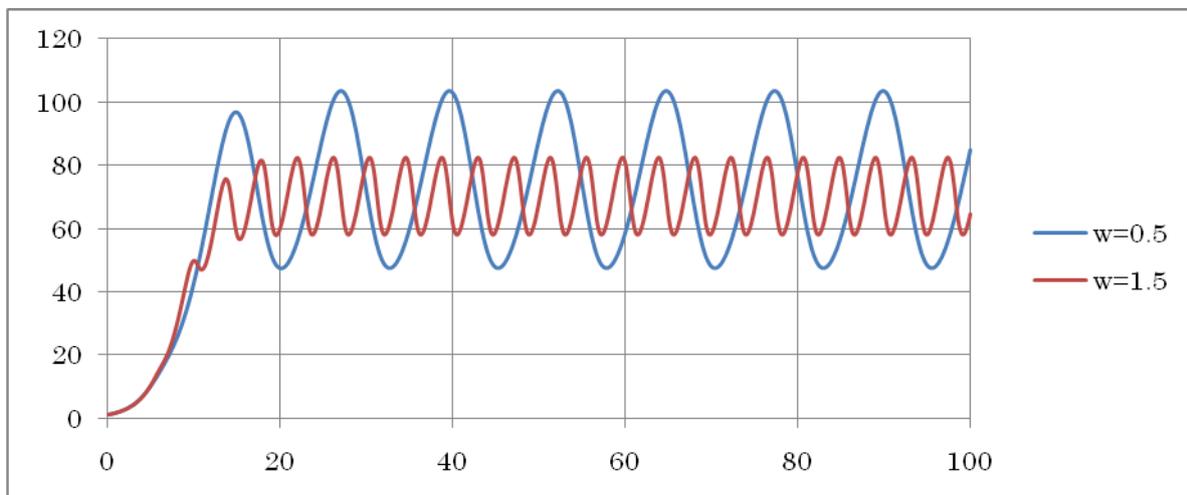


図 45 環境容量のゆらぎ。 $r=0.5$, $K=80$, 振幅 $\alpha=0.5$, 角振動数 $w=0.5$ (青線)、 $w=1.5$ (赤線)

ここで、成長係数 r とのおもしろい関係をみておこう。環境容量の変化速度は (5.4) 式の w (角速度) によって決まる。この w の値を動かすことによって個体数がどのように変化するかをみてみよう。図 49 は環境変化のスピードが遅い (w の値が小さい) 場合、図 50 は環境変化のスピードが速い (w の値が大きい) 場合の個体数の変動を示したものである。環境変化がゆったりしていると、個体数もその変化に追隨して変化しているのが分かる。ところが、環境変化のスピードが速くなると、個体はもはやその変化には対応できずに個体数の変動幅自体も小さくなっているのが分かる。

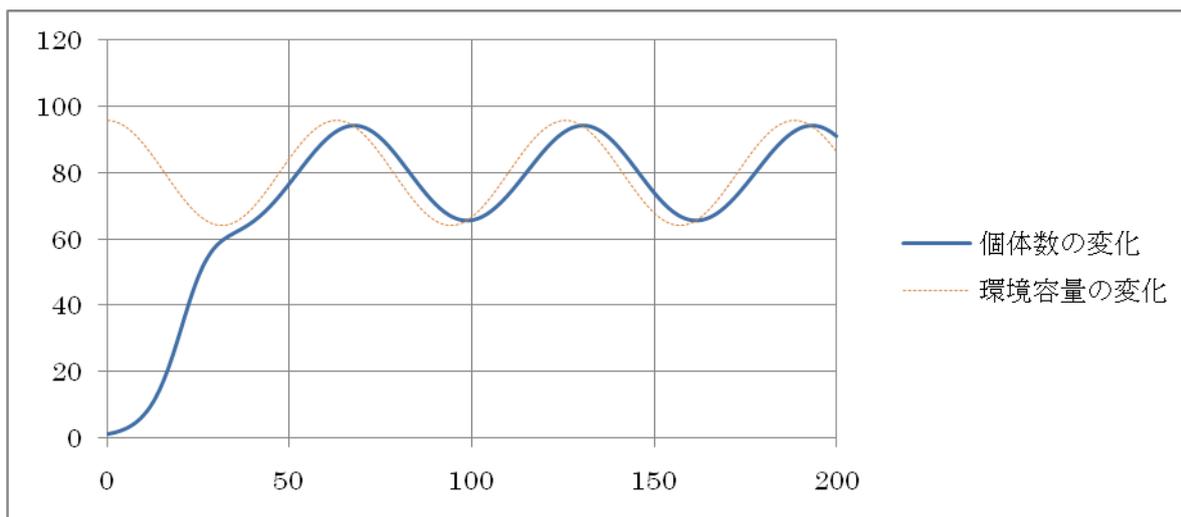


図 49 $r=0.2, K=80, \alpha=0.2, w=0.1$

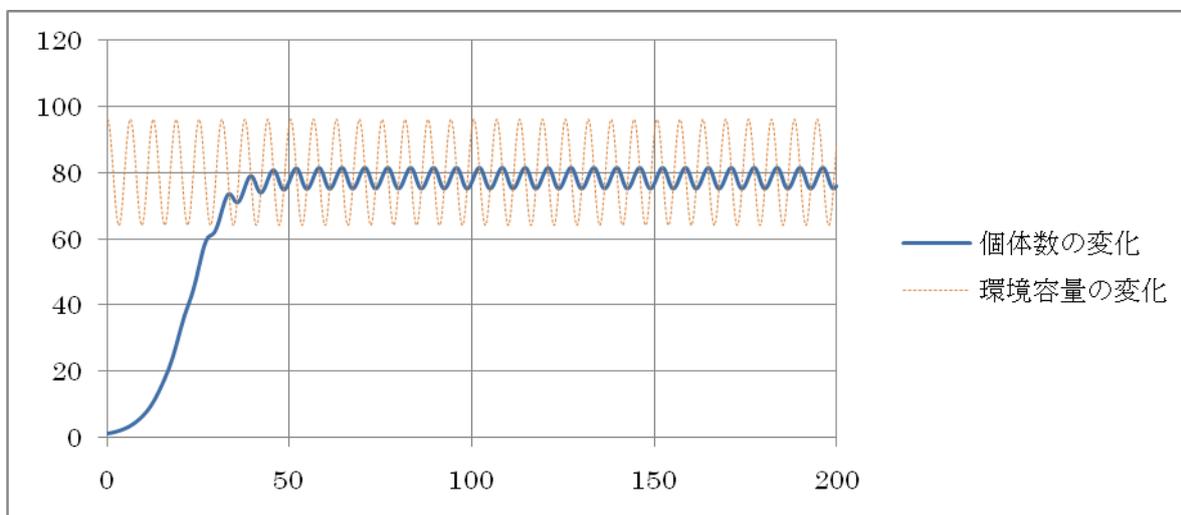


図 50 $r=0.2, K=80, \alpha=0.2, w=1.0$

表xは成長係数、環境容量の変化速度と個体数の変動幅を調べたものである。またその結果をグラフにしたものが図 52 である。横軸が環境容量の変化スピード (w)、縦軸が個体数の振幅(変動幅)。環境容量の変化スピードが速くなると個体数とその変化についていけなくなる様子、また、成長係数が高いほど環境の変化に敏感に反応することが分かる。

成長係数 (r)	環境容量 の変化速 度 (w)	平均個体 数(右軸)	個体数の 振幅	変動幅	
				Min.	Max.
0.2	0.1	80.7	28.7	65.50	94.17
0.2	0.5	78.6	11.9	72.68	84.57
0.2	1.0	78.4	6.3	75.19	81.52
0.5	0.1	76.4	31.4	64.29	95.70
0.5	0.5	79.2	22.9	67.92	90.77
0.5	1.0	78.7	14.5	71.48	85.96
0.8	0.1	82.0	31.8	64.11	95.89
0.8	0.5	77.1	27.4	66.01	93.44
0.8	1.0	79.0	20.4	68.91	89.32

表x

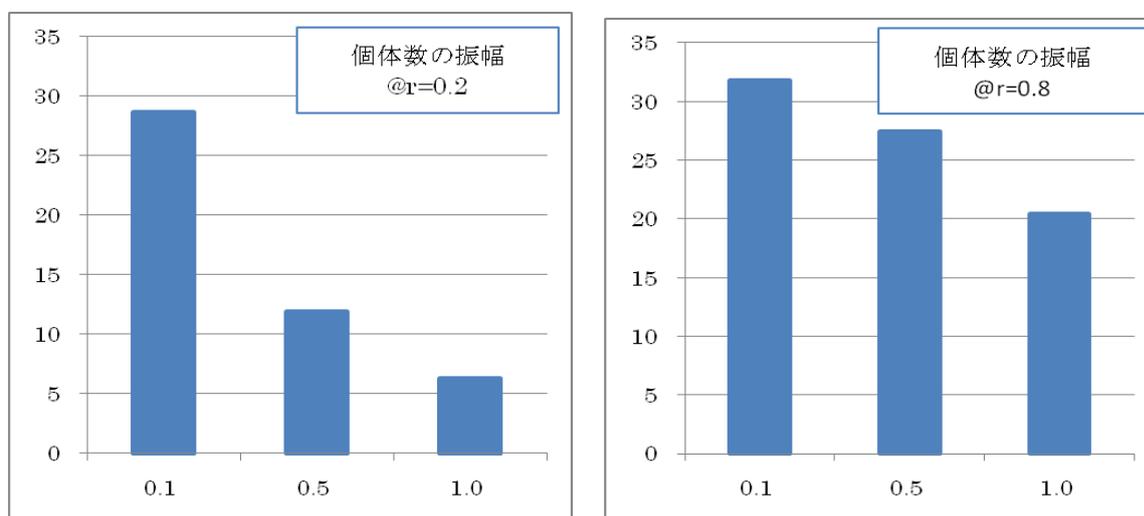


図 52 横軸が環境容量の変化スピード (w)、縦軸が個体数の振幅(変動幅)。環境容量の変化スピードが速くなると個体数とその変化についていけなくなる。また、成長係数が高いほど環境の変化に敏感に反応する。

ここまで、成長係数 r は平衡点に達するまでの速度だけに影響するものとしてきたが、ここではじめて個体数の変化に影響を与えるケースが表れたことになる。個体数の変動は $r^2/(r^2+w^2)$ によるとされているが、この因子は図 53 が示す通り、 w (環境容量の変化速度) が r (成長係数) よりも大きくなると急に小さくなる性質をもっている。

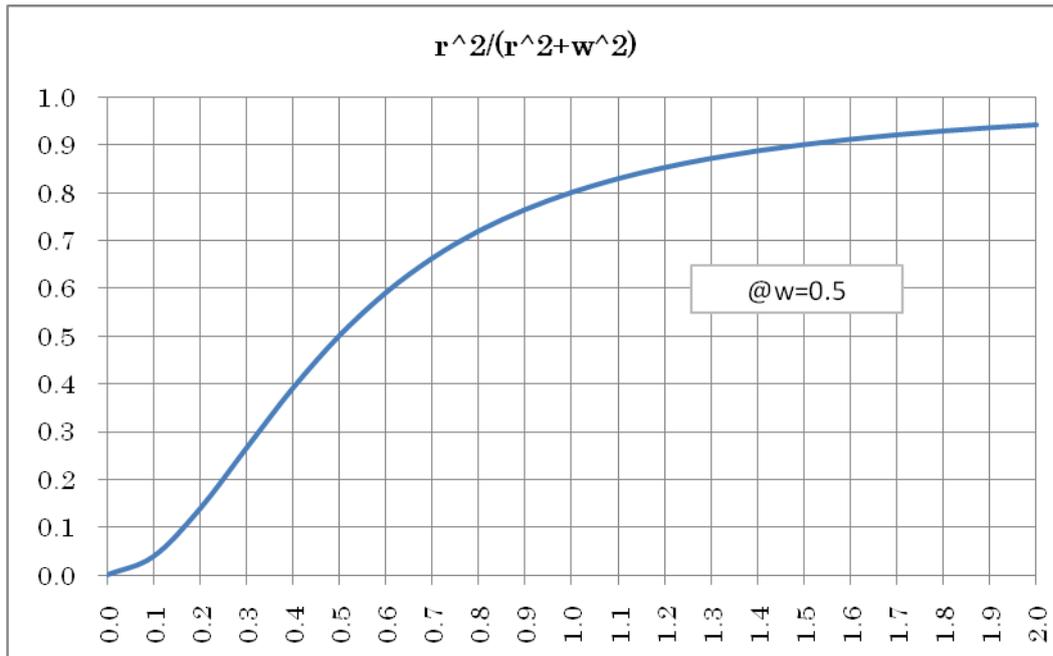


図 53 成長係数 r (横軸) と $r^2/(r^2+w^2)$ (縦軸) の相関関係。 r が $w(=0.5)$ より小さくなると $r^2/(r^2+w^2)$ は急に小さくなる。

以上、一種の場合の動きを頭に入れたうえで二種(二社)の競走モデルに展開してみよう。(2.1) を (5.5) のように書き変える。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} (2.1)$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1 (1 + \alpha \cos w_1 t)) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y)/K_2 (1 + \beta \cos w_2 t)) \end{aligned} \right\} (5.5)$$

まず、ゆらぎのない基本条件を以下のとおり設定する。 x と y は交点座標である (57, 46) に集束する (図 45)。

r_1	0.5	a	0.6
r_2	0.5	b	0.5
K_1	80.0		
K_2	80.0		

ここで、 x の環境容量だけに次のようなゆらぎを与えてみよう。

r_1	0.5	a	0.6		
r_2	0.5	b	0.5		
K_1	80.0	α	0.300	w_1	0.200
K_2	80.0	β	0.000	w_2	0.000

そして、さらにそのゆらぎを大きくしてみよう。

r_1	0.5	a	0.6		
r_2	0.5	b	0.5		
K_1	80.0	α	0.900	w_1	0.200
K_2	80.0	β	0.000	w_2	0.000

x の環境容量 K_1 のゆらぎを図示したものが図 45 である。

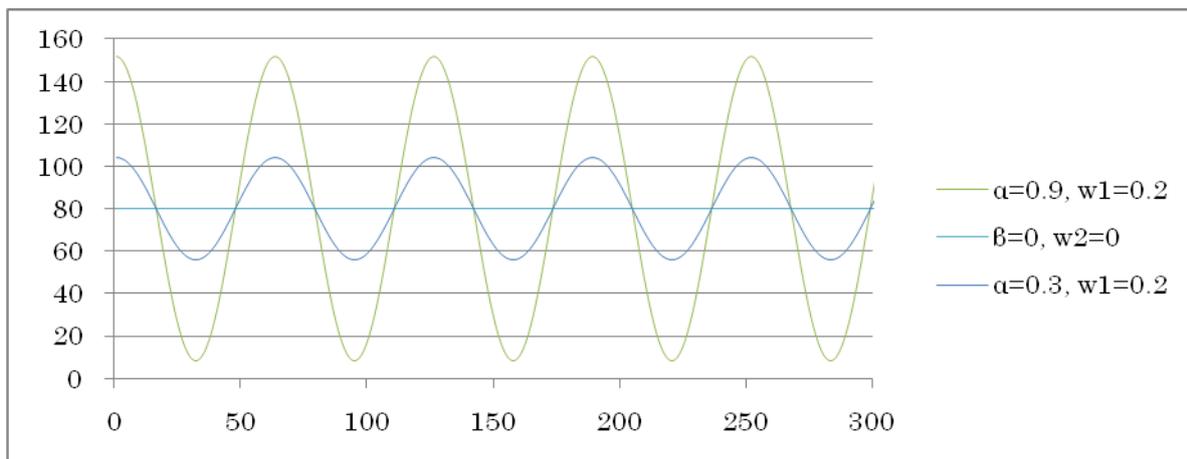


図 45 x の環境容量 K_1 のゆらぎ。

さて、結果はどうなるだろうか。表 5~7 の条件で x と y がどのように推移するかをグラフにしたものが以下である。

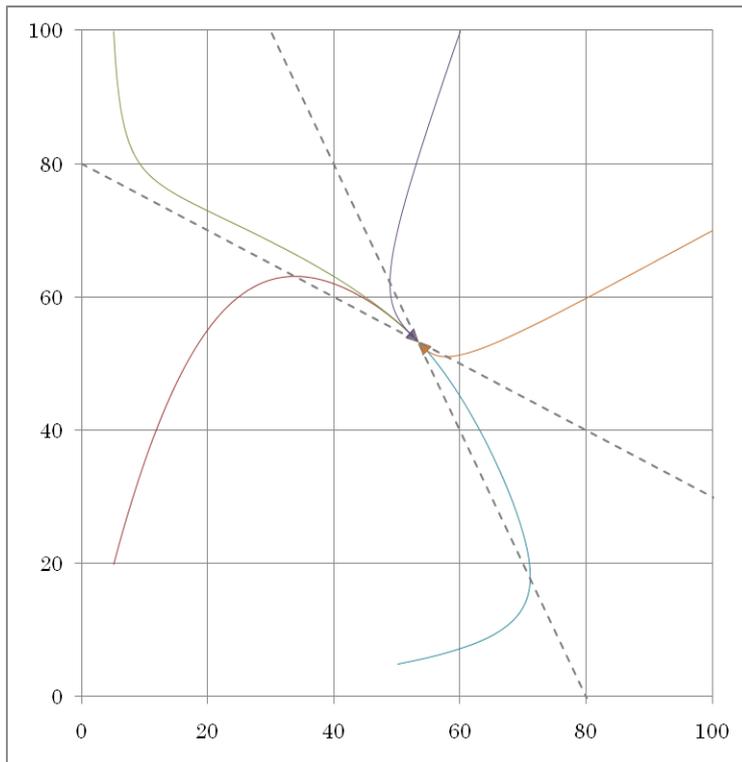


図 46-1 x, y どちらにもゆらぎがないときの集束座標は(57,46)
 $r_1, r_2=0.5, a=0.6, b=0.5, K_1, K_2=80$

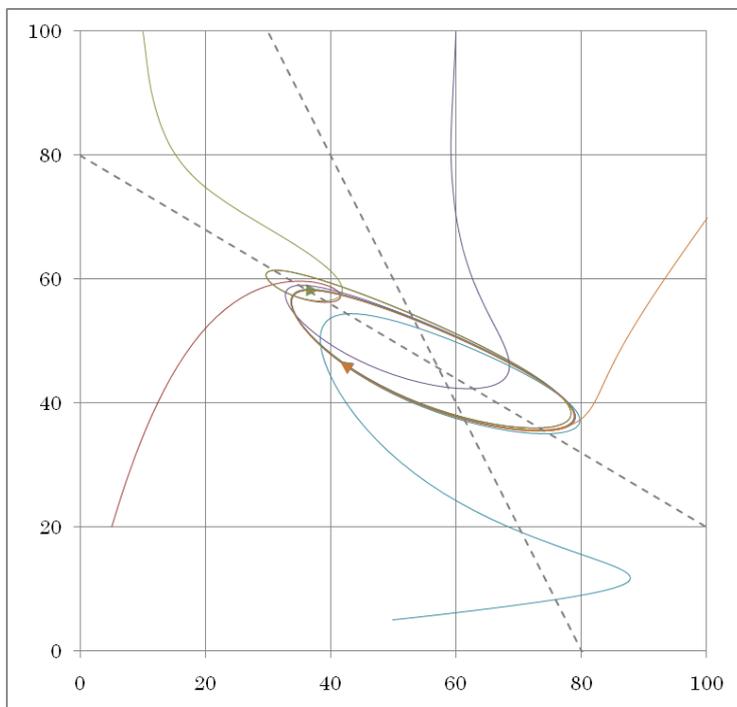


図 46-2 x の環境容量 K_1 にゆらぎを与えると集束座標を中心とする楕円軌道を描き始める。
 $r_1, r_2=0.5, a=0.6, b=0.5, K_1=80(1+0.3\cos 0.2t), K_2=80$

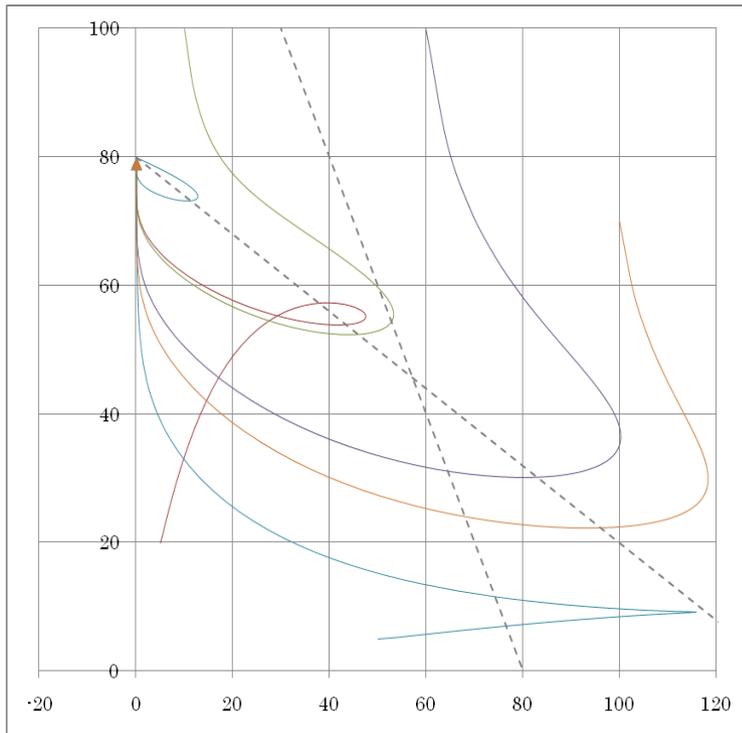


図 46-3 x の環境容量 K_1 にさらに大きなゆらぎを与えると x は y に淘汰されてしまう。

$$r_1, r_2 = 0.5, \quad a = 0.6, \quad b = 0.5, \quad K_1 = 80(1 + 0.3 \cos 0.2t), \quad K_2 = 80$$

環境容量のゆらぎは経営者目線のぶれと捉えることができる。上記の計算結果は目線が大きくぶればぶれるほど事業存続のリスクが高まることを示唆している。第三章の〈現状維持型経営者への警鐘〉でも触れたとおり経営者は一貫して高い目線をもっていなければならないことがここでもよく分かる。

ところで、環境容量の振れ方をコサイン・カーブで表現したが、経営者目線という側面から考えると、たとえば経営者が交代して、目線が大きく変化する場合などはその動きは曲線ではなく直線に近いはずである。ひとが替わると方針が一気に変化することはよくあるし、替わったあともそのひとがいる間は同じ状態が継続すると考える方が自然である。コサイン・カーブではその変化をうまく再現することはできない。そこで、環境容量の変動をコサインではなく方形波(フーリエ級数)で代用してみよう。微分方程式を以下のように修正する。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by) / (1 + \alpha (\sin(t+w_1) + \sin(3(t+w_1)) / 3 + \sin(5(t+w_1)) / 5 + \sin(7(t+w_1)) / 7)) K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y) / (1 + \beta (\sin(t+w_1) + \sin(3(t+w_1)) / 3 + \sin(5(t+w_1)) / 5 + \sin(7(t+w_1)) / 7)) K_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

(5.7) 式に以下のパラメーターを入力して計算をすると、環境容量は図 47 のように変動する。コサイン・カーブと違い、変化が直線的であり、変化後はしばらくその状態が継続していることが分かる。赤

線と青線で振幅 (α と β)と位相 (w_1 と w_2)を変えることで、二社の経営者の目線の振れ方とそのタイミングのずれをうまく表現することができる。

	r	K	競走係数		環境容量			
					振幅		位相	
x	0.5	80	a	0.50	α	0.60	w_1	10.00
y	0.4	80	b	0.50	β	0.30	w_2	5.00

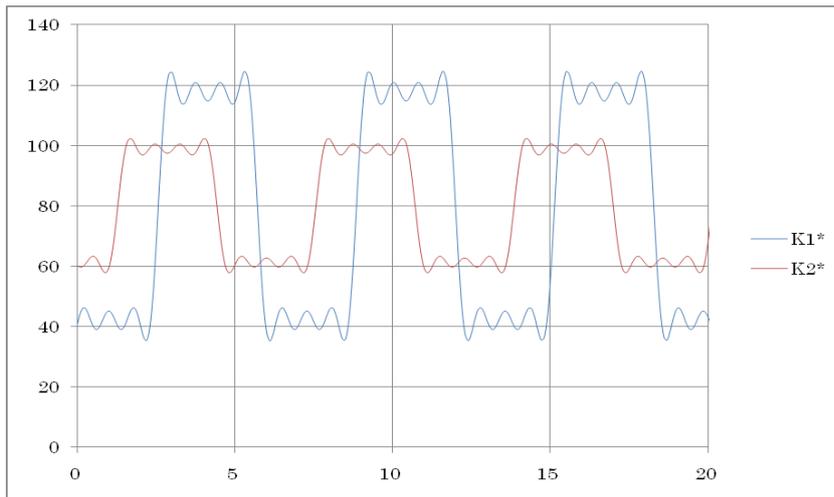


図 47 環境容量のゆらぎを方形波で表現したもの。コサイン曲線よりも切り替わりがシャープで、変化後はしばらくその状態が継続する。

注) よく見ると、ひとつの大きな波の中に小さい波の山が四つあるが、この数は(5.4)式の中にあるフーリエ展開の数に対応している。この数が多くなればなるほど波の数が増えるとともに振幅が小さくなり、全体の波形が四角形に近づくことから「方形波」と呼ばれる。

この環境容量のゆらぎによって、二社の成長がどのように影響されるかをみてみよう。x と y の環境容量はそれぞれ揺らいでいるため、共存点の近くでリミット・サイクルを描いている(図 48-1)。x の環境容量のゆらぎ α を少しずつ大きくしていくと、共存点が徐々に左へ移動していくのが分かる(図 48-2, 図 48-3)。x の環境容量がゆらぐことによって x の成長が不安定となりいずれ y に淘汰されてしまうことを示している。図 46 と図 48 は基本的には同じこと、つまり、ぶれた方が負けるという原則を視覚的に経営者に訴えかけたいへん重要な図であるといえよう。

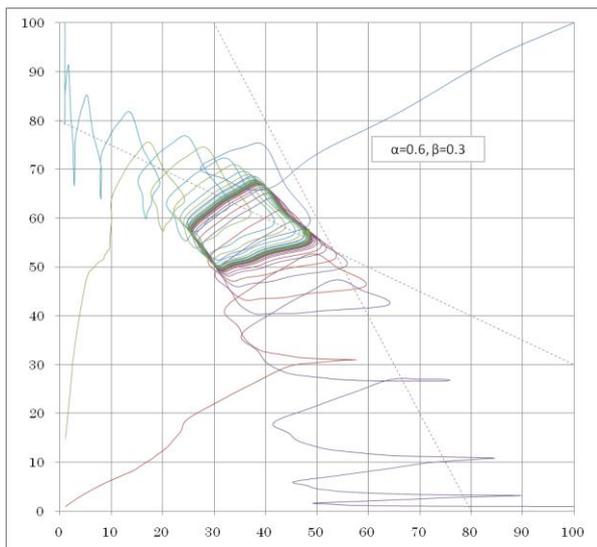


図 48-1

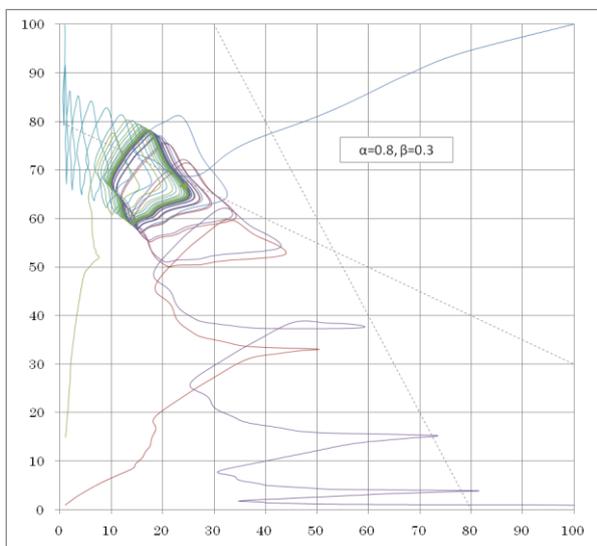


図 48-2

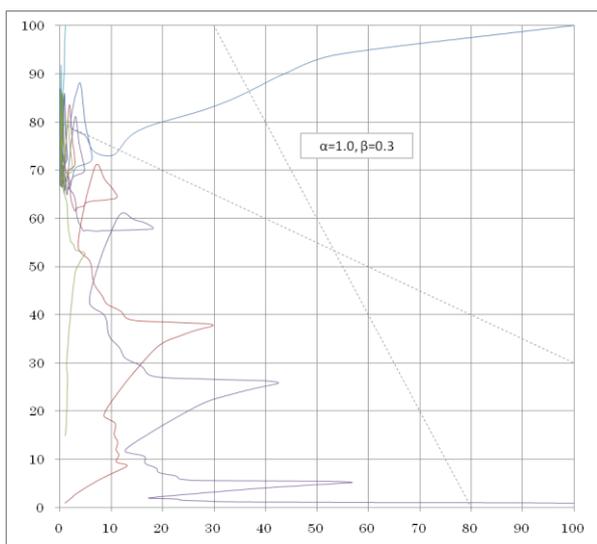


図 48-3

では次に、 y の環境容量 K_2 にも x とほぼ同等のゆらぎを与えてみよう。図 47 はその状態を示すもの

であるが、図46-2の楕円軌道と比較すると係数のわずかな違いにもかかわらず軌道範囲が大きく拡大していることが分かる。

r_1	0.5	a	0.6		
r_2	0.5	b	0.5		
K_1	80.0	α	0.300	w_1	0.200
K_2	80.0	β	0.320	w_2	0.210

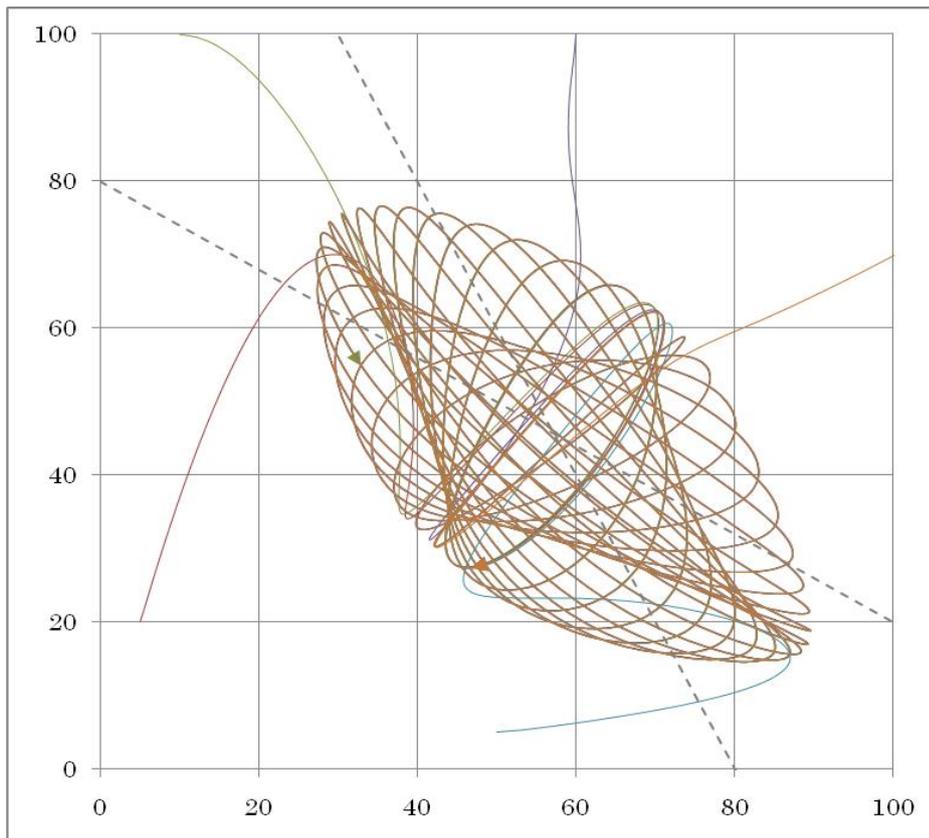


図47 xとy双方の環境容量が近い値でゆらぐ場合。xの環境容量だけがゆらぐよりも軌道範囲は拡大する。

最後に競走係数と環境容量の双方にゆらぎを与えてみよう。支配する微分方程式は、(5.5) と (5.6) を合成した、(5.8) とする。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (ax+y)/K_2) \end{aligned} \right\} (2.1)$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+b(\cos w_2 t)y)/K_1) \\ dy/dt &= r_2 y (1 - (a(\cos w_1 t)x+y)/K_2) \end{aligned} \right\} (5.5)$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1 x (1 - (x+by)/K_1 (1 + \alpha \cos w_1 t)) \end{aligned} \right\} (5.6)$$

$$dy/dt=r_2y(1-(ax+y)/K_2(1+\beta \cos w_2t))$$



$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= r_1x(1-(x+b(\cos k_1t)y)/K_1(1+\alpha \cos w_1t)) \\ dy/dt &= r_2y(1-(a(\cos k_2t)x+y)/K_2(1+\beta \cos w_2t)) \end{aligned} \right\} (5.8)$$

各係数は次のとおりとする。

r_1	0.5	a	0.6	k_1	0.200
r_2	0.5	b	0.5	k_2	0.210
K_1	80.0	α	0.200	w_1	0.200
K_2	80.0	β	0.210	w_2	0.210

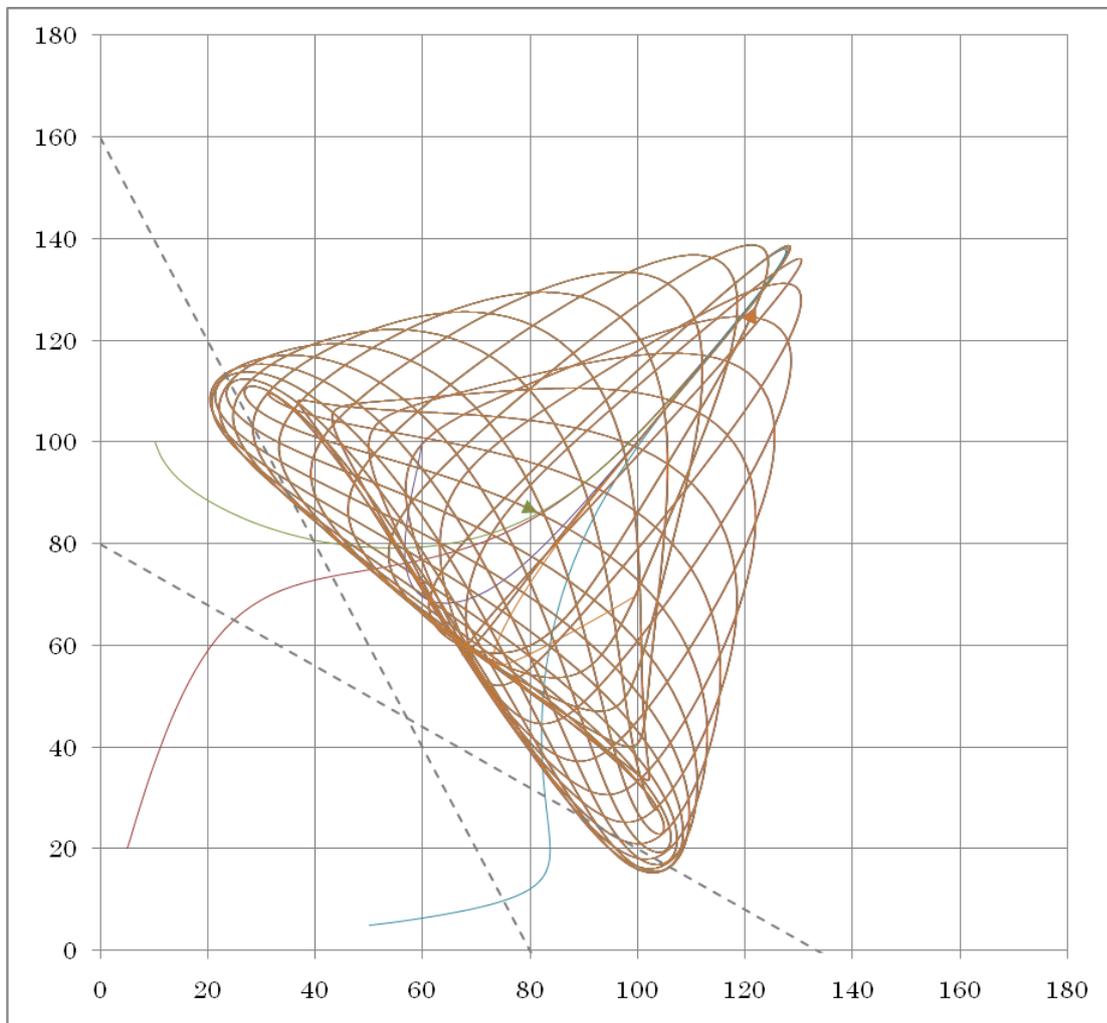


図 48 x と y の競争係数と環境容量の双方にゆらぎを与えた場合。軌道範囲はさらに大きくなる。

これらのことは一体なにを示唆しているのだろうか。もう一度、元に戻って考えてみよう。第二章の基礎理論によれば、競争係数と環境容量の組合せによって x と y はどちらか一方が淘汰されたり、両方

が共存したりする。係数が一定の場合は共存点もひとつしかなく、初期値にかかわらずそこへ集束する。そして、その後は時間の経過にかかわらず、ずっとその共存点に留まる。ところが、実際のビジネスにおいては係数が一定ということはありません。係数がゆらぐと、淘汰が共存に切り替わったり、逆に共存が淘汰へと変化したりする。そしてその共存の状態は、静的なものではなく、動的なものである。そして、その動的軌道の範囲は係数のゆらぎに比例して大小様々に変化する。

以上のことは、経営に置き換えてみると、経営者の目線(環境容量)がころころ変わると社員がついていけなくなりその振れ幅の中間あたりに落ちてしまうが、目線がじわじわと変化しているときは社員がその変化を捉えることができ経営者のレベルに合わせた結果が出せる(出てしまう)ようになるということを示唆しているといえよう。京セラの稲盛社長(当時)は、社員には、まずこの町の中で一番の会社になろう、この町で一番になったら京都で一番の会社になろう、京都で一番になったら日本一になろう、日本一になったら世界一を目指そうと順を追ってゆっくりと目標を設定されたようである。個人的には当初から世界一の会社を目指しておられたかもしれないが、一気にそのことを社員に伝えることはしないで、少しずつ目線を上げたからこそ事業を大きく成長させることができたといえるかもしれない。

<第六章> ロトカ・ボルテラ競争モデルの拡張 その3 (拡散と移流)

さて、ここからさらに数理の助けを借りて議論を拡げみよう。生物はある「場所」で誕生してその生活圏を拡げていく。これまでは生物の個体数だけに注目していたが、ここからはその生活圏がどのように拡散するのか、時間と場所の二次元で考察してみよう。ロジスティック方程式 (1.4) に拡散をもたらす項を加える。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) \quad (\text{式 6.1})$$

破線部分は拡散方程式といわれ、たとえば図 6.1 のように熱が時間とともに拡散するようすを表すことができる。この式 6.1 を拡散ロジスティック方程式と呼ぶことにしよう。

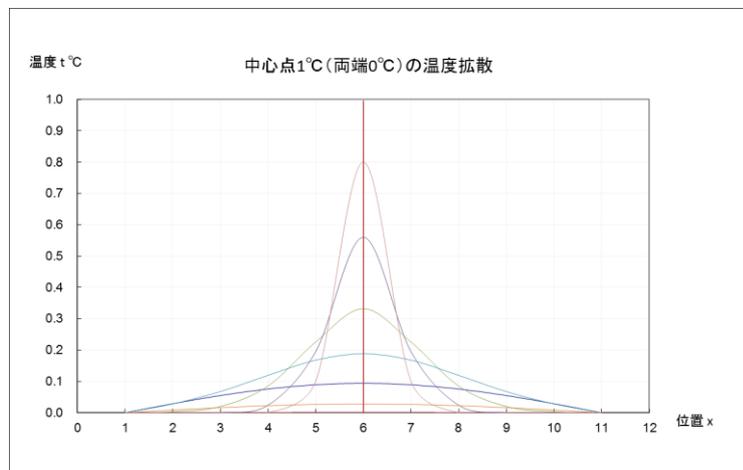


図 6.1

式 6.1 をエクセルで見に見える形にするために数式にするために四則演算で表す(差分化する)と、

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = D \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + rU_{i,j} \left(1 - \frac{U_{i,j}}{K}\right) \quad (\text{式 6.2})$$

ここで i は場所、 j は時間を表すので $i+1$ は拡散、 $j+1$ は時間の経過を示している。変形して、

$$U_{i,j+1} = (Dk/h^2)U_{i-1,j} + (1 - 2Dk/h^2)U_{i,j} + (Dk/h^2)U_{i+1,j} + rU_{i,j}(1 - U_{i,j}/K) \quad (\text{式 6.3})$$

エクセル展開するためには場所 x と時間 t の差分 Δx と Δt 、及び拡散定数の D を予め設定しておく必要がある。それらを仮に以下のとおりとして、

$h (\Delta x)$	0.50
$k (\Delta t)$	0.10
k/h^2	0.20

D	0.5
Dk/h^2	0.2000
$1-2Dk/h^2$	0.6000
Dk/h^2	0.2000

ロジスティック方程式の成長係数 r と環境容量 K を以下のとおりとする。

成長係数	r	0.7
環境容量	K	10

以上の値を式 6.3 で展開してグラフ化したものが図 6.2 である。

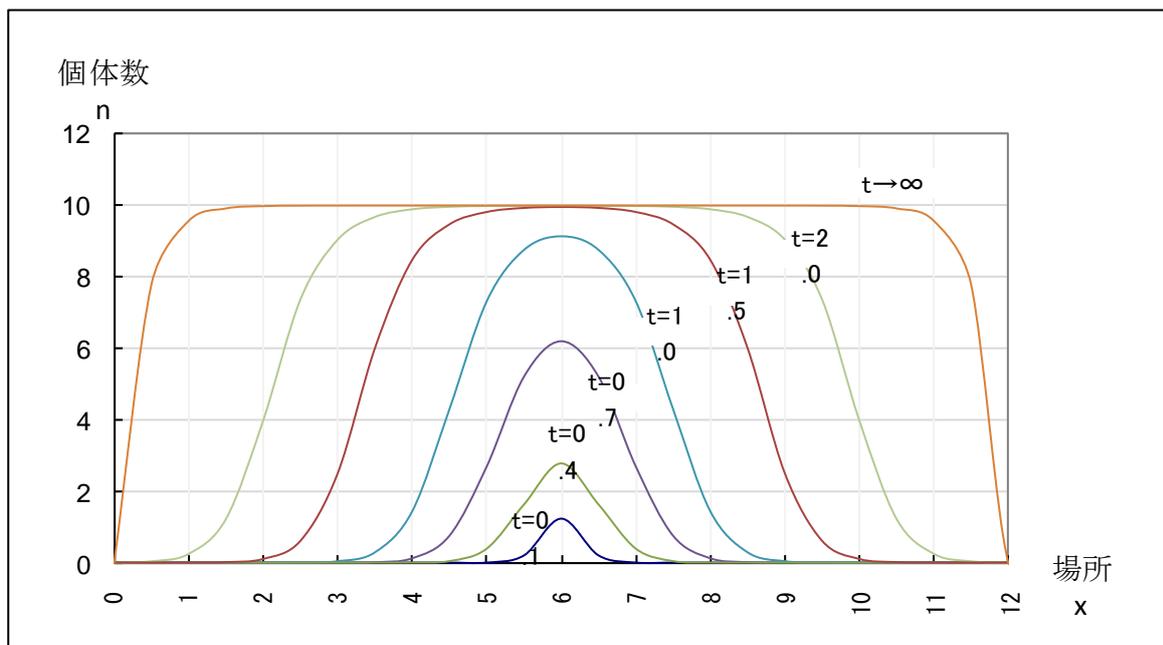


図 6.2

場所 $x=6$ で生まれた生物が時間の経過とともに拡散しながら成長しているのが分かる。ちなみに、場所の両端 $x=0$ と $x=12$ の外には拡散できない条件としている。

さて、生物はずっと発祥地に留まっているとは限らない。餌を求めて居住地を移動させることも多い。この移動を数式に加味してみよう。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -G \frac{\partial n}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + rn \left(1 - \frac{n}{K}\right) \quad (\text{式 6.4})$$

破線部分は移流方程式と呼ばれているので、式 6.4 は移流拡散ロジスティック方程式と呼ぶことにする。拡散ロジスティック方程式同様の差分化と定数の設定を以下のとおり行くと、式 6.4 による移動と拡散の様子は以下のとおりとなる。(図 6.3)

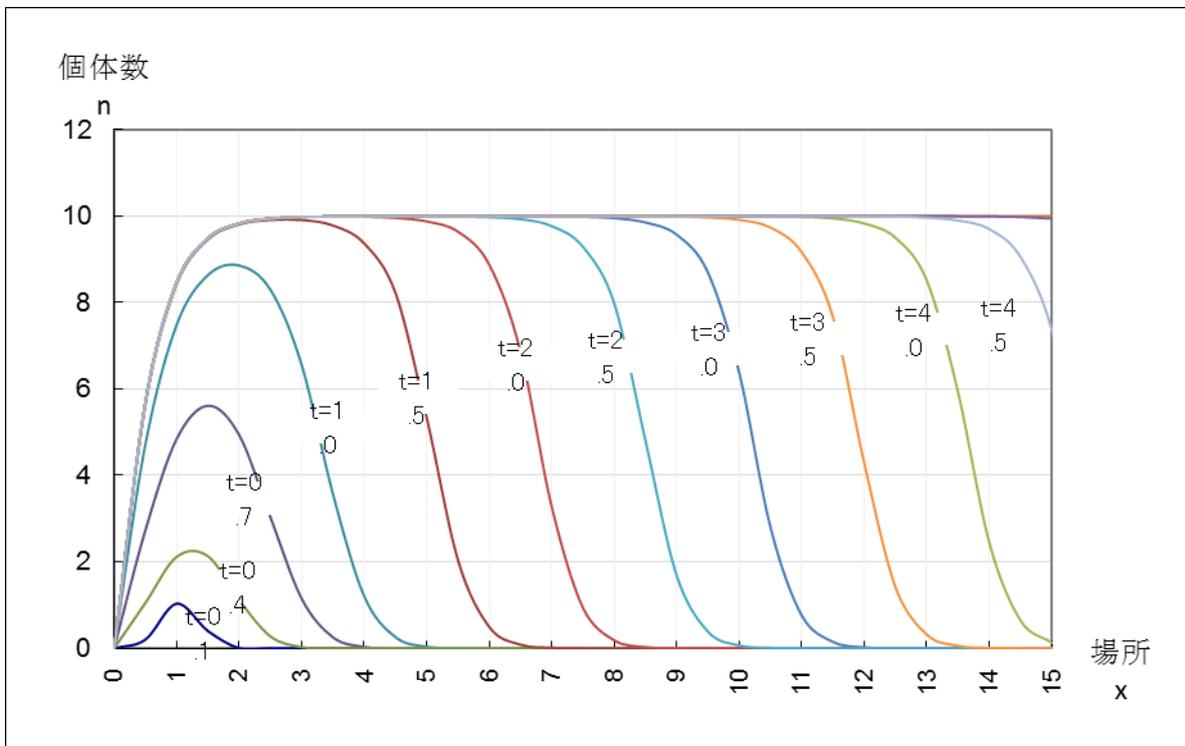


図 6.3

発祥地は $x=1$ 。時間の経過とともに右側へ拡散しながら移動しているのが分かる。